

Σημασιολογία προτασιακής λογικής

ερμηνεία: $I = \{p \rightarrow T, q \rightarrow F\} \sim \text{val}(p) = T, \text{val}(q) = F$

$$\text{val}(p \wedge q) = \text{val}(p) \wedge \text{val}(q) = T \wedge F = F$$

πρόταση π ικανοποιήσιμη: $\exists I : \text{val}(\pi) = T$, τότε I μοντέλο του π

① π_1 ικανοποιήσιμη; $\exists I : I \models \pi_1$

② π_1 ταυτολογία; $\forall I : I \models \pi_1$

③ π_1 αντίφαση; $\nexists I : I \models \pi_1$

④ $\pi_1 \models \pi_2$; $\forall I : I \models \pi_1 \Rightarrow I \models \pi_2$

$\pi_1: ?p$

$\pi_2: (p \wedge ?q) \rightarrow (p \wedge q)$

Πίνακας αληθείας

p	q	$p \wedge ?q$	$p \wedge q$	π_1	π_2	
T	T	F	F	F	T	① πρέπει για κάποια γραμμή $\pi_1 \rightarrow T \Rightarrow \pi_1$ ικανόν
T	F	T	F	F	F	② πρέπει για κάθε γραμμή $\pi_1 \rightarrow T \Rightarrow \pi_1$ όχι ταυτ
F	T	F	F	T	T	③ πρέπει για κάθε γραμμή $\pi_1 \rightarrow F \Rightarrow \pi_1$ όχι αναρκ
F	F	F	T	T	T	④ πρέπει για κάθε γραμμή με $\pi_1 \rightarrow T$ τότε και $\pi_2 \rightarrow T \Rightarrow \pi_1 \models \pi_2$

$K = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n\}$ και $K \models \pi$

$\Rightarrow \nexists$ γραμμή με $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n \rightarrow T$ και $\pi \rightarrow F$

Προτασιακή Λογική Πρώτου Τάξης (ΠΠΤ)

ερμηνεία:

πεδία Δ^1 : $\text{nx } \Delta^1 = \{a, b, c, d\}$

σταθερές a^1 : $a^1 \rightarrow a \in \Delta^1$

κατηγορήματα $p(x)$: $p(x) \rightarrow p^1 \subseteq \Delta^1$

$q(x, y)$: $q(x, y) \rightarrow q^1 \subseteq \Delta^1 \times \Delta^1$

συναρτήσεις f : $f \rightarrow f^1 \in \Delta^1 \rightarrow \Delta^1$

$\text{nx } p^1 = \{a, b\}$

$\text{nx } q^1 = \{(a, b), (c, d)\}$

$\text{nx } f^1 = \{a \rightarrow b, c \rightarrow d\}$

ανάθεση μεταβλητών της π στο Δ^1 της ερμηνείας I : $\mu: \text{Var}(\pi) \rightarrow \Delta^1$

I μοντέλο της π : $\exists I, \mu: I, \mu \models \pi$

π ικανοποιήσιμη: $\exists I, \mu: I, \mu \models \pi \sim$ άωση: παράδειγμα

π ταυτολογία: $\forall I \exists \mu: I, \mu \models \pi \sim$ άωση: αποδείξη ή αντιπαράδειγμα

Παράδειγμα 1

→ προφανής ταυτολογία

$$\pi: p(x) \wedge q(x) \Rightarrow \exists x. (p(x) \vee q(x))$$

είναι π ταυτολογία;

$$\text{έστω ότι δεν είναι} \Rightarrow \exists I. \forall \mu. I, \mu \not\models \pi \Rightarrow \textcircled{1} \text{ και } \textcircled{2}$$

$$I, \mu \models (p(x) \wedge q(x)) \quad \textcircled{1}$$

$$I, \mu \not\models \exists x. (p(x) \vee q(x)) \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \forall \mu. I, \mu \models p(x) \text{ και } I, \mu \models q(x) \Leftrightarrow p^I = q^I = \Delta^I$$

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow \exists \mu': I, \mu' \models \exists x. (p(x) \vee q(x)) \Leftrightarrow \exists \mu': I, \mu' \models (p(x) \vee q(x))$$

$$\Leftrightarrow \exists \mu': I, \mu' \models p(x) \text{ ή } I, \mu' \models q(x) \Leftrightarrow p^I = \emptyset \text{ και } q^I = \emptyset$$

→ π ταυτολογία

άτονο!

Παράδειγμα 2

$$K = \{ \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4 \}$$

$$\pi_1: \forall x \forall y. (p(x,y) \rightarrow r(x,y)) \equiv \forall x \forall y. (\neg p(x,y) \vee r(x,y))$$

$$\pi_2: \forall x \forall y. ((r(x,y) \wedge q(x)) \rightarrow (s(x,y) \wedge t(x))) \equiv \forall x \forall y. (\neg(r(x,y) \wedge q(x)) \vee (s(x,y) \wedge t(x)))$$

$$\pi_3: p(a,b) \quad \pi_4: q(a)$$

$$\pi: \exists x. S(x,b) \quad K \models \pi;$$

$$\text{έστω } I \text{ μοντέλο της } K \text{ και όχι της } \pi \Rightarrow \exists I, \mu: I, \mu \models K \text{ και } I, \mu \not\models \pi$$

$$\text{έστω } \Delta^I \text{ πεδίο } a^I = a, b^I = b \quad I, \mu \models K \Leftrightarrow$$

$$I, \mu \models \pi_3 \Leftrightarrow I, \mu \models p(a,b) \Rightarrow (a,b) \in p^I$$

$$I, \mu \models \pi_4 \Leftrightarrow I, \mu \models q(a) \Rightarrow a \in q^I$$

$$I, \mu \models \pi_1 \Leftrightarrow \forall \mu' I, \mu' \not\models p(x,y) \text{ ή } I, \mu' \models r(x,y)$$

$$\text{έστω } \mu' = \{x \mapsto a, y \mapsto b\} \sim (a,b) \in p^I \Rightarrow I, \mu' \models p(x,y)$$

$$\text{άρα πρέπει για } \mu': I, \mu' \models r(x,y) \Leftrightarrow (a,b) \in r^I$$

$$I, \mu \models \pi_2 \Leftrightarrow \forall \mu' I, \mu' \not\models (r(x,y) \wedge q(x)) \text{ ή } I, \mu' \models (s(x,y) \wedge t(x))$$

$$\text{έστω } \mu' = \{x \mapsto a, y \mapsto b\} \sim a \in q^I \Rightarrow I, \mu' \models q(x)$$

$$\sim (a,b) \in r^I \Rightarrow I, \mu' \not\models r(x,y)$$

$$\text{άρα πρέπει για } \mu': I, \mu' \models (s(x,y) \wedge t(x)) \Leftrightarrow \begin{cases} I, \mu' \models s(x,y) \\ I, \mu' \models t(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a,b) \in s^I \\ a \in t^I \end{cases}$$

$$\text{έστω ότι } I, \mu \not\models \exists x. S(x,b) \Leftrightarrow \exists \mu': I, \mu' \models S(x,b)$$

$$\text{όμως για } \mu' = \{x \mapsto a\}: (a,b) \in s^I \Rightarrow I, \mu' \models S(x,b)$$

→ άρα $K \models \pi$

Παράδειγμα 3

$$\forall x \exists y \forall z (p(x,y) \rightarrow \exists w (q(z,w) \wedge p(y,w)))$$

βήμα 1: $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

$$p \Leftarrow q \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$$

$$\forall x \exists y \forall z (\neg p(x,y) \vee \exists w (q(z,w) \wedge p(y,w)))$$

βήμα 2: $\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q) \quad \neg(\forall x q) \equiv \exists x \neg q \quad \neg(\neg p) \equiv p$
 $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q) \quad \neg(\exists x q) \equiv \forall x \neg q$

έτσιφο

βήμα 3: μοναδικά ονόματα σε όλες τις μεταβλητές

έτσιφο

→ Skolemization

βήμα 4: αφαίρεση υπαρξιακών ποσοδείκτων, εισαγωγής σταθερών ή συναρτήσεων Skolem

$$\exists x_1 \forall x_2 \forall x_3 : x_1 \rightarrow c$$

$$\forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 : x_3 \rightarrow f(x_1, x_2)$$

$$\forall x_1 \exists x_2 \exists x_3 : x_2 \rightarrow f_1(x_1), \quad x_3 \rightarrow f_2(x_1)$$

$$y \rightarrow f_1(x) \quad w \rightarrow f_2(x, z) : \forall x \forall z (\neg p(x, f(x)) \vee (q(z, f_2(x, z)) \wedge p(f(x), f_2(x, z))))$$

βήμα 5: μετακίνηση και διαγραφή υπαρξιακών ποσοδείκτων

$$(p \wedge (\forall x q)) \equiv (\forall x q) \wedge p \equiv \forall x (p \wedge q) \equiv p \wedge q$$

$$(p \vee (\forall x q)) \equiv (\forall x q) \vee p \equiv \forall x (p \vee q) \equiv p \vee q$$

$$\neg p(x, f(x)) \vee (q(z, f_2(x, z)) \wedge p(f(x), f_2(x, z)))$$

βήμα 6: $p \vee (q \wedge r) \equiv (q \wedge r) \vee p \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

$$(\neg p(x, f(x)) \vee q(z, f_2(x, z))) \wedge (\neg p(x, f(x)) \vee p(f(x), f_2(x, z)))$$

βήμα 7: ανόρθωση τετριμμένων $p \vee p \equiv p \quad p \wedge p \equiv p$

έτσιφο

$$\leadsto \text{CNF: } \{ [\neg p(x, f(x)), q(z, f_2(x, z))]_1, [\neg p(x, f(x)), p(f(x), f_2(x, z))]_2 \}$$

Αυτοματη Σημολογηση

Παράδειγμα 4

→ ίδιο με πριν αλλά με Αλγόριθμο Αναλυσης

$$K = \{n_1, n_2, n_3, n_4\}$$

$$\pi_1: \forall x \forall y (p(x,y) \rightarrow r(x,y)) \equiv \forall x \forall y (\neg p(x,y) \vee r(x,y))$$

$$\pi_2: \forall x \forall y ((r(x,y) \wedge q(x)) \rightarrow (s(x,y) \wedge t(x,y))) \equiv \forall x \forall y (\neg r(x,y) \vee \neg q(x) \vee (s(x,y) \wedge t(x,y)))$$

$$\pi_3: p(a,b) \quad \pi_4: q(a)$$

$$a. \pi: \exists x. s(x,b) \quad K \models \pi ?$$

Βήμα 1: μετατροπή της γλώσσας σε CNF

$$K = \{[\neg p(x,y), r(x,y)]_1, [\neg r(x,y), \neg q(x), s(x,y)]_2, [\neg r(x,y), \neg q(x), t(x)]_3, [p(a,b)]_4, [q(a)]_5\}$$

$$\text{Βήμα 2: αν } K \models \pi \Rightarrow K \cup \{\neg \pi\} \vdash \perp$$

$$\neg \pi \equiv \neg (\exists x. s(x,b)) \equiv \forall x \neg s(x,b) \equiv [\neg s(x,b)]_c \quad (\text{most general unifier})$$

→ δεν αντικαθιστώ μεταβλητές εκτός εάν είναι αναπόφευκτα απαραίτητο

$$x \rightarrow a, y \rightarrow b$$

$$\begin{array}{l|l} \textcircled{1}: [\neg p(a,b), r(a,b)]_1 & \textcircled{7}: [r(a,b)]_7 \\ \textcircled{4}: [p(a,b)]_4 & \textcircled{2}: [\neg r(a,b), \neg q(a), s(a,b)]_2 \end{array} \rightarrow [\neg q(a), s(a,b)]_6$$

$$\begin{array}{l|l} \textcircled{3}: [\neg q(a), s(a,b)]_3 & \textcircled{8}: [s(a,b)]_8 \\ \textcircled{5}: [q(a)]_5 & \textcircled{6}: [\neg s(a,b)]_6 \end{array} \rightarrow \textcircled{9}: [s(a,b)]_9 \quad \sim K \models \pi$$

συνολικά:

$$\textcircled{1}, \textcircled{4} \xrightarrow{x \rightarrow a, y \rightarrow b} [r(a,b)] \xrightarrow{x \rightarrow a, y \rightarrow b} [\neg q(a), s(a,b)] \xrightarrow{\textcircled{5}} [s(a,b)] \xrightarrow{x \rightarrow a} \perp$$

$$b. \pi': \forall x. s(x,b) \quad K \models \pi' ?$$

όταν $K \models \pi$, ο αλγόριθμος της Αναλυσης είχε διαγράψει τα πάντα και παράγεται η κενή πρόταση, είχε κολλήσει σε άδυνα παράγοντας συνεχώς τα ίδια.

Ανάλυση SLD → πάντα Horn

Παράδειγμα 5

→ ίδιο με πριν / είναι πρόταση Horn → okay
 $K = \{ \neg p(x,y), r(x,y), (\neg r(x,y), \neg q(x), s(x,y))_2, (\neg r(x,y), \neg q(x), t(x))_3, [p(a,b)]_4, [q(a)]_5 \}$
 $\Pi: \exists x, s(x,b). K \in \Pi?$

αν $K \in \Pi \Rightarrow K \cup \{\neg \Pi\} \vdash \perp$

$\neg \Pi \equiv \neg (\exists x, s(x,b)) \equiv \forall x, \neg s(x,b) \equiv (\neg s(x,b))_c$

$y \rightarrow b$
 $\textcircled{2}: [\neg r(x,b), \neg q(x), s(x,b)] \rightarrow [\neg r(x,b), \neg q(x)]_7$
 $\textcircled{6}: [\neg s(x,b)]$
 $\textcircled{1}: [\neg p(x,b), r(x,b)] \rightarrow [\neg p(x,b), \neg q(x)]_8$
 $\textcircled{3}: [\neg r(x,b), \neg q(x)]$

$x \rightarrow a$
 $\textcircled{4}: [p(a,b)] \rightarrow [q(a)]_9$
 $\textcircled{5}: [q(a)] \rightarrow \perp$
 $\textcircled{3}: [\neg p(a,b), \neg q(a)]$
 $\textcircled{9}: [\neg q(a)]$
 ? ποια η διαφορά με πριν?
 υπάρχει κανένα συγκεκριμένη
 σύμα?

συνολικά:

$\textcircled{2}, \textcircled{6} \xrightarrow{y \rightarrow b} [\neg r(x,b), \neg q(x)] \xrightarrow{y \rightarrow b} [\neg p(x,b), \neg q(x)] \xrightarrow{x \rightarrow a} [\neg q(a)] \xrightarrow{\textcircled{5}} \perp$

Περιγραφική λογική

$\Delta^1, C^1 \subseteq \Delta^1, r^1 \subseteq \Delta^1 \times \Delta^1, a^1 \in \Delta^1$

$\sim (C \cap D)^1 = C^1 \cap D^1$

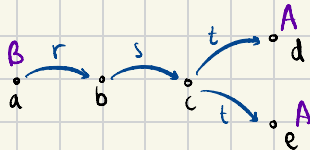
$\sim (C \cup D)^1 = C^1 \cup D^1$

$\sim (rC)^1 = \Delta^1 \setminus C^1$

$\sim (\exists r.C)^1 = \{x \in \Delta^1, \exists y, (x,y) r^1 \wedge y \in C^1\}$

$\sim (\forall r.C)^1 = \{x \in \Delta^1, \forall y, (x,y) r^1 \wedge y \in C^1\}$

$B \cap (\exists r (\exists s (\geq 2t.A))) \neq \emptyset$



δίνω ερμηνεία:

$\Delta^1 = \{a, b, c, d, e\}$

$A^1 = \{d, e\}$ $B^1 = \{a\}$

$r^1 = \{(a,b)\}$ $s^1 = \{(b,c)\}$

$t^1 = \{(c,d), (c,e)\}$

Λογικά προγράμματα

- ① $gf(x,y) \leftarrow f(x,z), p(z,y)$
- ② $p(x,y) \leftarrow f(x,y)$
- ③ $p(x,y) \leftarrow m(x,y)$
- ④ $f(a,b) \leftarrow$
- ⑤ $m(b,c) \leftarrow$

συμβολική

αν έχετε λίγο χρόνο και πολλά επωνύματα πρέπει
εξαιρέτικα μια φορά το forward και βρείτε
τα όλα

forward: $gf(a,x)$? ναι, για $x=c$
 $f(x,a)$? όχι, πρέπει αναδρομικά

$x \rightarrow a, y \rightarrow b$:

- ④ $f(a,b) \leftarrow$ $\rightarrow p(a,b)$ ⑥
- ② $p(a,b) \leftarrow f(a,b)$

$x \rightarrow b, y \rightarrow c$:

- ⑤ $m(b,c) \leftarrow$ $\rightarrow p(b,c)$ ⑦
- ③ $p(b,c) \leftarrow m(b,c)$

$x \rightarrow a, y \rightarrow b, z \rightarrow b$

- ① $gf(a,b)$

backward: $gf(a,x)$?

$gf(a,x)$

① $x=a$

$f(a,z), p(z,y)$

② $z=b$

$p(b,y)$

③ $x=b$

$m(b,y)$

⑤ $y=c$

[]

$gf(x,a)$

① $y=a$

$f(x,z), p(z,a)$

② $x=b, y=a$

$p(b,a)$

② $x=b, y=a$

$f(b,a)$

③ $x=b, y=a$

$m(b,a)$

$f(x,z)$

③ $x=b, y=a$

$f(b,a)$

$f(z,a)$

③ $z=b$

$f(x,b)$

X

X

X

X

Παράδειγμα

$f(x_1, x_2) = 215 + x_1 \sin(4\pi x_1) + x_2 \sin(20\pi x_2) \rightarrow$ βρούμε max με ακρίβεια 4 δεκαδικών

$$-3 \leq x_1 \leq 12.1 \quad 4.1 \leq x_2 \leq 5.8$$

μέγεθος πληθυσμού: pop.size = 20

πιθανότητα διασταύρωσης: $p_c = 0.25$

πιθανότητα μεταλλάξης: $p_m = 0.01$

μεταβλητή x_1 :

$-3 \leq x_1 \leq 12.1 \Rightarrow$ μήκος διαστήματος = 15.1

ακρίβεια 4 δεκαδικών $\Rightarrow 15.1 \cdot 10,000$ ίσα υποδ

$\Rightarrow 18$ διωδικά ψηφία, δίνω $2^4 \leq 151,000 \leq 2^5$

$\hookrightarrow$ 1^ο ζήτημα χρωμοσώματος

μεταβλητή x_2 :

$4.1 \leq x_2 \leq 5.8 \Rightarrow$ μήκος διασ. = 1.7

$\Rightarrow 1.7 \cdot 10,000 = 17,000$ ίσα υποδ

$\Rightarrow 15$ διωδικά ψηφία, δίνω $2^4 \leq 17,000 \leq 2^5$

$\hookrightarrow$ 2^ο ζήτημα χρωμοσώματος

$$(b_{11} b_{12} \dots b_{18} \quad b_{21} b_{22} \dots b_{25}) : x_1 = -30 + \frac{\text{decimal}(b_{11} \dots b_{18})}{2^8 - 1} \cdot 15.1, \quad x_2 = 5.8 + \frac{\text{decimal}(b_{21} \dots b_{25})}{2^5 - 1} \cdot 1.7$$

για x_1 για x_2

$\Rightarrow \langle x_1, x_2 \rangle$ με απόδοση $f(x_1, x_2)$

1 αρχικό πληθυσμό 20 χρωμοσώμα V_i (33 bit το καθένα)

2 υπολογισμός απόδοσης πληθυσμού: $\text{eval}(V_i)$

3 υπολογισμός συνολικής απόδοσης: $F = \sum_{i=1}^{20} \text{eval}(V_i)$

4 υπολογισμός πιθανότητας p_i : $p_i = \text{eval}(V_i) / F$

5 υπολογισμός αθροιστικών q_i : $q_i = \sum_{j=1}^i p_j$

6 παραγωγή 20 αριθμών $\in (0,1)$ στην ρουλέτα

κάθε περιστροφή $\rightarrow$ 1 νέο άτομο: περισφ r_i : $q_{i0} < r_i < q_{i1} \Rightarrow V_i^* = V_{i1}$

$\sim$ στο παράδειγμα δεν περισφ τα $V_6, V_{12}, V_{14}, V_{19}, V_{20}$

7. επειδή $p_c = 0.25$ παίρνουμε κατά μέ 25% $N=5$ άτομα για Crossover

παραγωγή 20 αριθμών και αν $r_i < 0.25$ τότε το V_i^* επιλέγεται για Crossover

$\sim$ στο παράδειγμα επιλέχθηκαν τα $V_6^*, V_{12}^*, V_{14}^*, V_{19}^*, V_{20}^*$

$V_6^*, V_{12}^*, pos = 9 \sim V_6^{**}, V_{12}^{**}$

$V_{14}^*, V_{19}^*, pos = 20 \sim V_{14}^{**}, V_{19}^{**}$

8. επειδή $p_m = 0.01$ και ο πληθυσμός αποτελείται από 33 $20 = 660$ bit αναμένουμε

$660 \cdot 1\% = 6.6$ μεταλλάξεις

παραγωγή 660 αριθμών και αν $r_i < 0.01 \rightarrow i$ bit μεταλλάσσεται

9. τέλος 1^{ης} γενιάς

$i = 33k + 1$
 $\hookrightarrow$ δέσφ ψηφίων
από ζήτημα

Travelling Salesman Problem

① Order crossover:

$P_1: (123|4567|89) \rightarrow P_1: (45679) \rightarrow P_1: (456793) \rightarrow$
 $P_2: (452|1876|93) \rightarrow P_2: (4521876\textcircled{9}3) \rightarrow P_2: (45218769\textcircled{3})$
không không
 $P_1: (2456793) \rightarrow P_1: (21456793) \rightarrow P_1: (218456793)$
 $P_2: (\textcircled{4}5\textcircled{2})187693 \rightarrow P_2: (452187693) \rightarrow P_2: (4521\textcircled{8}7693)$
không không không
 $\Rightarrow P_1: (218456793) \text{ và } P_2: \text{quay lại}$

② PMX Crossover

$P_1: (123|4567|89) \rightarrow P_1: (123|1876|89) \rightarrow P_1: (123|1876|89)$
 $P_2: (452|1876|93) \rightarrow P_2: (452|4567|93) \rightarrow P_2: (452|4567|93)$
1 $\leftrightarrow$ 4, 8 $\leftrightarrow$ 5, 7 $\leftrightarrow$ 6, 6 $\leftrightarrow$ 7
 $P_1: (X23|1876|X9) \xrightarrow{\text{không}} P_1: (423|1876|59)$
 $P_2: (XX2|4567|93) \xrightarrow{\text{không}} P_2: (182|4567|93)$

$P_1: (847|3625|90) \rightarrow P_1: (847|34567|90) \rightarrow P_1: (847|34567|90)$
 $P_2: (012|34567|89) \rightarrow P_2: (012|3625|89) \rightarrow P_2: (012|3625|89)$
3 $\leftrightarrow$ 3, 4 $\leftrightarrow$ 6, 5 $\leftrightarrow$ 2, 6 $\leftrightarrow$ 5, 7 $\leftrightarrow$ 1
 $P_1: (8XX|34567|90) \rightarrow P_1: (82X|34567|90) \rightarrow P_1: (821|34567|90)$
 $P_2: (01X|3625|89) \rightarrow P_2: (01X|3625|89) \rightarrow P_2: (014|3625|89)$
4 $\leftrightarrow$ 6 và 6 $\leftrightarrow$ 5 và 5 $\leftrightarrow$ 2 7 $\leftrightarrow$ 1 4 $\leftrightarrow$ 6 và 7 $\leftrightarrow$ 1
5 $\leftrightarrow$ 2 và 6 $\leftrightarrow$ 5 và 4 $\leftrightarrow$ 6