

Θέμα 1 (3 μονάδες)

Η εταιρεία τουριστικών επιχειρήσεων TRAVEL AE μελετά διάφορες εναλλακτικές προώθησης των πακέτων προσφορών με στόχο την προσέλκυση πελατών και αύξηση των εσόδων της. Μία προτεινόμενη ενέργεια από το τμήμα marketing της εταιρείας είναι η μαζική αποστολή ηλεκτρονικών μηνυμάτων (sms/emails), με τα οποία θα ενημερώνει το αγοραστικό κοινό για τις προσφορές της. Το κόστος της προωθητικής αυτής ενέργειας ανέρχεται σε 8.000€ και εκτιμάται ότι σε ποσοστό 70% θα έχει μεγάλη απήχηση στο αγοραστικό κοινό και θα αυξήσει τα έσοδα της εταιρείας κατά 240.000€, ενώ εκτιμάται ότι στην αντίθετη περίπτωση, αυτή της μικρής απήχησης, τα έσοδα της εταιρείας θα αυξηθούν κατά 20.000€.

Εναλλακτικά, η TRAVEL μπορεί να απευθυνθεί σε εταιρεία τηλεφωνικής προώθησης, η οποία θα αναλάβει την τηλεφωνική ενημέρωση του αγοραστικού κοινού σχετικά με τις προσφορές της. Το κόστος για τις υπηρεσίες τηλεφωνικής προώθησης ανέρχεται σε 10.000€. Εκτιμάται ότι, λόγω της άμεσης επικοινωνίας με το κοινό, η ενέργεια αυτή θα έχει μεγάλη επιτυχία με πιθανότητα 60% που θα οδηγήσει σε πώληση περίπου 900 πακέτων διακοπών ή με πιθανότητα 10% θα έχει μικρότερη επιτυχία που θα οδηγήσει σε πώληση περίπου 700 πακέτων ή τέλος θα έχει μικρή επιτυχία που θα οδηγήσει σε πώληση περίπου 30 πακέτων.

Η εταιρεία σκέφτεται ακόμα να προωθήσει τα πακέτα μέσω των μέσων κοινωνικής δικτύωσης με στοχευμένη καμπάνια. Το κόστος για την ενέργεια αυτή ανέρχεται σε 15.000€ και αναμένεται ότι με πιθανότητα 75% θα οδηγήσει σε πώληση περίπου 800 πακέτων διακοπών, ενώ με πιθανότητα 25% θα οδηγήσει σε πώληση περίπου 200 πακέτων. Εκτιμάται ότι τα έσοδα από την πώληση ενός πακέτου ανέρχονται κατά μέσο όρο στα 315€.

Τέλος, η εταιρεία έχει τη δυνατότητα να προσλάβει εξωτερικό σύμβουλο με στόχο την εκπόνηση μελέτης κόστους 2.000€ σχετικά με την εκτίμηση της απήχησης της προώθησης μέσω μαζικής αποστολής ηλεκτρονικών μηνυμάτων. Παρόμοιες έρευνες στο παρελθόν προέβλεπαν ανεπιτυχώς μεγάλη απήχηση σε ποσοστό 10% ενώ προέβλεπαν επιτυχώς μικρή απήχηση σε ποσοστό 60%.

1.1 (2.0) Να σχεδιαστεί το δέντρο αποφάσεων του προβλήματος και να προσδιοριστεί η βέλτιστη πολιτική που πρέπει να ακολουθηθεί από την TRAVEL με το κριτήριο του Bayes.

a1: μαζικά sms/emails

$$S_{11} (70\%): \text{μεγάλη απηχ} \rightarrow \text{κέρδος} = 240 - 8 = 232k \quad \left. \begin{array}{l} S_{12} (30\%): \text{μικρή απηχ} \rightarrow \text{κέρδος} = 20 - 8 = 12k \end{array} \right\} \pi TK(a_1) = 166k$$

a2: εταιρεία τηλεφ προωθ

$$\left. \begin{array}{l} S_{21} (60\%): \text{πωλ 900 πακέτων} \rightarrow \text{κέρδος} = 900 \cdot 0.315 - 10 = 273.5k \\ S_{22} (10\%): \text{πωλ 700 πακέτων} \rightarrow \text{κέρδος} = 700 \cdot 0.315 - 10 = 210.5k \\ S_{23} (30\%): \text{πωλ 30 πακέτων} \rightarrow \text{κέρδος} = 30 \cdot 0.315 - 10 = -0.55k \end{array} \right\} \pi TK(a_2) = 184,985k$$

a3: social media

$$\left. \begin{array}{l} S_{31} (75\%): \text{πωλ 800 πακέτων} \rightarrow \text{κέρδος} = 800 \cdot 0.315 - 15 = 237k \\ S_{32} (25\%): \text{πωλ 200 πακέτων} \rightarrow \text{κέρδος} = 200 \cdot 0.315 - 15 = 48k \end{array} \right\} \pi TK(a_3) = 189,75k$$

a4: καμία ενέργεια $\rightarrow$ κέρδος = 0 $\Rightarrow \pi TK(a_4) = 0$

$$\Rightarrow \pi TK(\text{χωρίς}) = 189,75k$$

Συμβουλοί: κόστος -2k		ω(7)	ω(3)
	$P(G S_i)$	S_{11}	S_{12}
Ε1: μεγάλη απηχ	E_1	0.9	0.4
Ε2: μικρή απηχ	E_2	0.1	0.6

$$P(E_1) = 0.9 \cdot 0.7 + 0.4 \cdot 0.3 = 0.75$$

$$P(E_2) = 0.1 \cdot 0.7 + 0.6 \cdot 0.3 = 0.25$$

	$P(S_i G)$	S_{11}	S_{12}
E_1		0.84	0.16
E_2		0.28	0.72

$E_1: (0.75)$

$$\pi TK(a_1|E_1) = 0.84 \cdot 232 + 0.16 \cdot 12 = 196.8k$$

$$\pi TK(a_2|E_1) = \pi TK(a_2) = 184,985k$$

$$\pi TK(a_3|E_1) = \pi TK(a_3) = 189,75k$$

$$\pi TK(a_4|E_1) = 0$$

$$\Rightarrow \pi TK(E_1) = 196.8k$$

$E_2: (0.25)$

$$\pi TK(a_1|E_2) = 0.28 \cdot 232 + 0.72 \cdot 12 = 73.6k$$

$$\pi TK(a_2|E_2) = \pi TK(a_2) = 184,985k$$

$$\pi TK(a_3|E_2) = \pi TK(a_3) = 189,75k$$

$$\pi TK(a_4|E_2) = 0$$

$$\Rightarrow \pi TK(E_2) = 189,75k$$

$$\pi TK(E) = \pi TK(\mu E) =$$

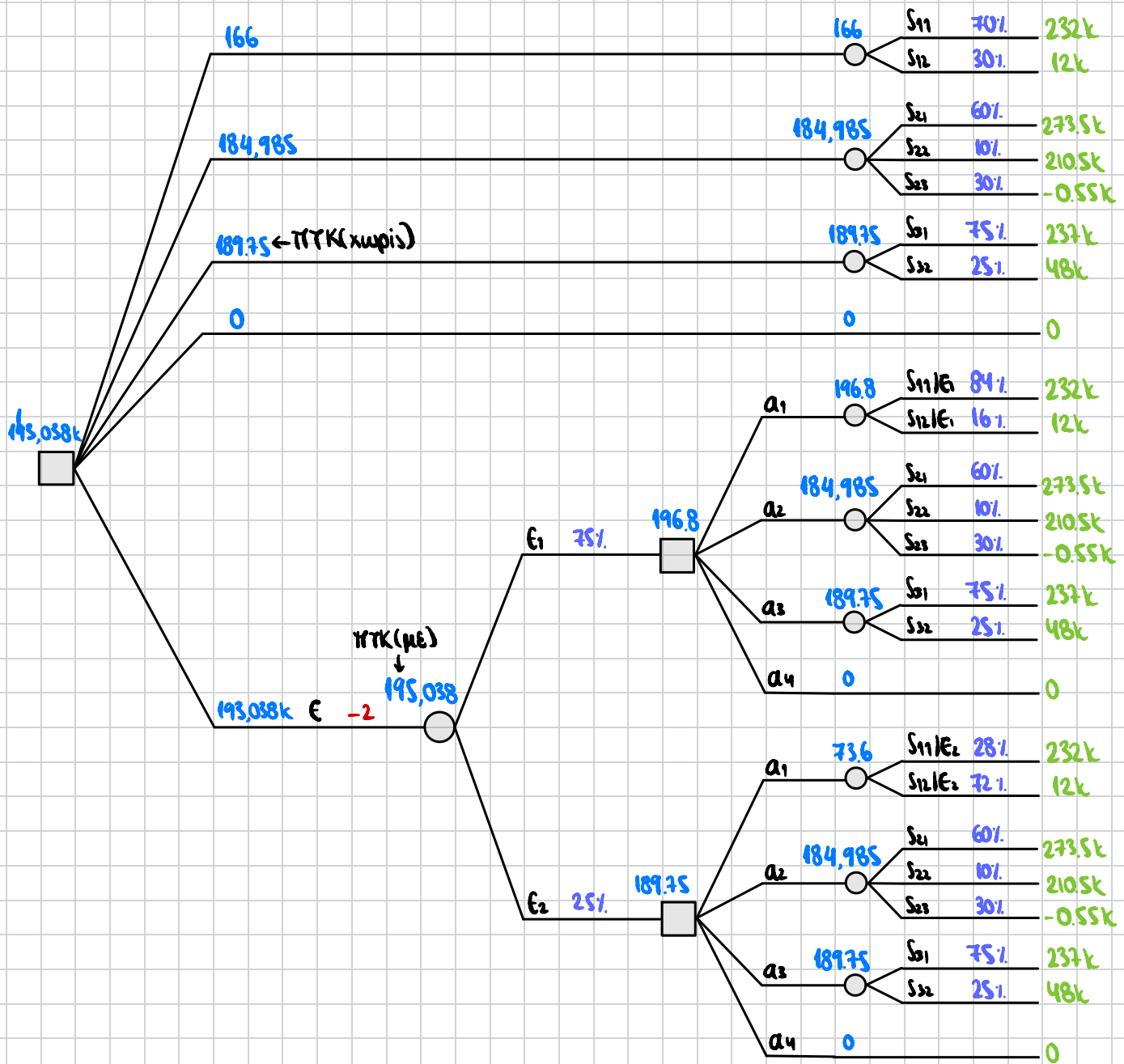
$$0.75 \cdot 196.8k + 0.25 \cdot 189.75 = 195,0375k$$

1.2 (1.0) Να προσδιοριστεί η αξία της δευτερογενούς πληροφορίας καθώς και η αξία της πληροφόρησης του συμβούλου.

$$\text{Παράδειγμα: } \pi AD\pi = \pi TK(\mu E) - \pi TK(\text{χωρίς}) = 195,0375 - 189,75 = 5,2875k > 2k \sim \text{συμφέρει}$$

$$\text{Πληθύνει: } \pi TK\pi\pi = P(S_{11}) \cdot K_{11}^* + P(S_{12}) \cdot K_{12}^* = 0.7 \cdot 232 + 0.3 \cdot 190 = 219.4k$$

$$\pi AD\pi\pi = \pi TK\pi\pi - \pi TK(\text{χωρίς}) = 219.4 - 189.75 = 29.65k > \pi AD\pi$$



Βέλτιστη Ίσχυρητική:

συμβουδοί:

- μεγάλη annex → μαζικά sms / emails
- μικρή annex → social media

Θέμα 2 (3 μονάδες)

Βιοτεχνία ενδυμάτων που ειδικεύεται στην χονδρική πώληση προγραμματίζει την παραγωγή της για τις επόμενες 3 χρονικές περιόδους. Η βιοτεχνία έχει τη δυνατότητα να διοχετεύει τα προϊόντα της απευθείας στους πελάτες της (μεγάλα καταστήματα και προμηθευτές) σε παρτίδες ή να τις αποθηκεύσει και να τις πουλήσει σε επόμενες περιόδους. Ο αριθμός παρτίδων που μπορούν να παραχθούν σε μια περίοδο δεν μπορεί να υπερβαίνει μια δεδομένη δυναμικότητα γι' αυτήν την περίοδο, ενώ η μέγιστη δυναμικότητα αποθήκευσης της εταιρείας ανέρχεται στις 3 παρτίδες.

Η ζήτηση κάθε περιόδου σε παρτίδες είναι εκ των προτέρων γνωστή και μπορεί να ικανοποιηθεί από την παραγωγή εκείνης της περιόδου ή από αποθέματα προηγούμενων περιόδων. Το απόθεμα στην αρχή της πρώτης περιόδου αποτελείται από μία παρτίδα ενώ στο τέλος της 3ης περιόδου το απόθεμα πρέπει να είναι μηδέν.

Το κόστος κάθε περιόδου αποτελείται από 2 συντελεστές: Κόστος παραγωγής, το οποίο είναι συνάρτηση του αριθμού των παρτίδων παραγωγής κατά την εκάστοτε περίοδο. Κόστος αποθήκευσης της περιόδου, το οποίο είναι συνάρτηση του συνολικού αποθέματος που βρίσκεται στην αποθήκη στο τέλος της περιόδου.

$$\text{Κόστος παραγωγής } C_v: C_v(x_v) = \begin{cases} 50x_v + (15 + 2 \cdot 1 + v \cdot 20), & 0 < x_v \leq \Delta_v, v = 1, \dots, 3 \\ 0, & x_v = 0 \end{cases}$$

$$\text{Κόστος αποθήκευσης: } H_v(a_v) = h_v \cdot a_v$$

Όπου v : η περίοδος, x_v : ο αριθμός παρτίδων παραγωγής, Δ_v : δυναμικότητα παρτίδων παραγωγής, a_v : το συνολικό απόθεμα σε παρτίδες στο τέλος της περιόδου v και h_v : κόστος αποθήκευσης ανά παρτίδα προϊόντος.

Περίοδος (v)	Ζήτηση (zv) - σε παρτίδες προϊόντος	Δυναμικότητα Παραγωγής (Dv) - σε παρτίδες προϊόντος	Κόστος αποθήκευσης (hv) - ανά παρτίδα προϊόντος
1	3	5	10
2	1	3	20
3	3	4	20

2.1 (3.0) Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του δυναμικού προγραμματισμού, προσδιορίστε το βέλτιστο πρόγραμμα παραγωγής που ικανοποιεί τη ζήτηση, ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος των επόμενων 3 περιόδων.

► Στάδια:

$n=1$: 3^{ος} μήνας

$n=2$: 2^{ος} μήνας

$n=3$: 1^{ος} μήνας

► Ζήτηση: $d_n = \{3, 1, 3\}$

► μεταβ. καταστάσεως: S_n τμχ. στην αποθήκη

► μεταβ. απόφασης: x_n τμχ. προς παραγωγή

$$S_{n-1} = S_n + x_n - d_n, S_1(\cdot) = S_3(\cdot) = 0$$

$$S_0 = 0, S_3 = 1$$

► Κόστος:

$$C_{\text{par}}(x_n) = (50x_n + 15 + 20 \cdot v) \cdot 1 \quad (x_n \neq 0)$$

$$C_{\text{anod}}(S_n) = h_n \cdot (S_n + x_n - d_n)$$

► Ελαχιστοποίηση κόστους:

$$F_n(S_n, x_n) = C_{\text{anod}}(S_n) + C_{\text{par}}(x_n) + F_{n-1}^*(S_n, x_n)$$

$$F_n^*(S_n, x_n) = \min \{F_n(S_n + x_n - d_n)\}$$

Βήμα $n=1$ ($d_3=3$) πρέπει $S_1 + x_1 = 3$ k

$$F_1(x_1, S_1) = (50x_1 + 75) + 20 \cdot 0 + F_0(S_1, x_1)$$

S_1/x_1	0	1	2	3	$F^*(S_1)$	x_1^*
0	x	x	x	225	225	3
1	x	x	175	x	175	2
2	x	125	x	x	125	1
3	0	x	x	x	0	0

$$1+0-1=0$$

Βήμα $n=2$ ($d_2=1$) $x_2 + S_2 = 1$ ή 2 ή 3 ή 4

$$F_2(S_2, x_2) = (50x_2 + 55) + 20(x_2 + S_2 - 1) + F_1^*(S_2 + x_2 - 1)$$

S_2/x_2	0	1	2	3	$F_2^*(S_2)$	x_2^*
0	x	105+0+225	155+20+175	205+40+125	330	1
1	0+0+225	105+20+175	155+40+125	205+60+0	225	0
2	0+20+175	105+30+125	155+60+0	x	195	0
3	0+40+125	105+40+0	x	x	165	1

$$3+1-3=1$$

Βήμα $n=3$ ($d_1=3$) $S_1=1$, $x_1 + S_1 = 3$ ή 4 ή 5 ή 6

$$F_3(S_3, x_3) = (50x_3 + 35) + 10(x_3 + S_3 - 2) + F_2^*(S_3 + x_3 - 2)$$

S_3/x_3	0	1	2	3	4	5	$F_3^*(S_3)$	x_3^*
1	x	x	135+0+310	185+10+225	235+20+175	285+30+125	420	3
	x	x	465	420	450	460		

Βέλτιστη Στρατηγική: $3 \rightarrow 0 \rightarrow 3$

Θέμα 3 (4 μονάδες)

Εταιρεία οικοδομικών εργασιών διαθέτει 2 ομάδες εργασίας, την O1 (ομάδα με λιγότερο έμπειρους εργαζομένους) και την O2 (ομάδα με έμπειρους εργαζομένους). Η εταιρεία ανέλαβε την πραγματοποίηση εργασιών σε μια υπό ανέγερση οικοδομή και θέλει να καθορίσει το πρόγραμμα εργασίας των ομάδων της για το επόμενο τρίμηνο.

Με βάση τον ευρύτερο ετήσιο προγραμματισμό, για να μπορέσουν να ανταποκριθούν οι δύο ομάδες στις υπόλοιπες εργασίες που προβλέπεται να αναλάβουν, η O1 δεν μπορεί να αξιοποιηθεί για πάνω από 550 ώρες στο επόμενο τρίμηνο σε αυτή την οικοδομή, ενώ η O2 δεν μπορεί να αξιοποιηθεί για πάνω από 500 ώρες σε αυτό το διάστημα.

Η εταιρεία έχει την υποχρέωση να παρέχει ασφαλιστική κάλυψη στους εργαζομένους της, η οποία κοστίζει 6 ευρώ/ώρα εργασίας της O1 και 8 ευρώ/ώρα εργασίας της O2. Με βάση τις συμβάσεις εργασίας και τους κανονισμούς ασφάλισης των δύο ομάδων, η εταιρεία έχει υποχρέωση να δαπανά τουλάχιστον 4.800 ευρώ για την ασφάλιση των εργαζομένων της.

Επιπλέον, λόγω διαφορετικού επιπέδου εμπειρίας, η απασχόληση της O1 κοστίζει στην εταιρεία 6 ευρώ/ώρα εργασίας, ενώ η απασχόληση της O2 κοστίζει 10 ευρώ/ώρα εργασίας. Συνολικά η εταιρεία υπολογίζει ότι για να είναι συμφέρουσα η εργασία που έχει αναλάβει, το κόστος απασχόλησης των δύο ομάδων δεν πρέπει να υπερβαίνει τα 6.000 ευρώ για το συγκεκριμένο τρίμηνο.

3.1 (1.5) Η εταιρεία επιθυμεί να μεγιστοποιήσει τις ώρες στις οποίες θα αξιοποιηθούν οι δύο ομάδες το επόμενο τρίμηνο. Διατυπώστε το μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού που επιλύει το παραπάνω πρόβλημα.

► Μεταβλητές:

x_1 : O1 hrs / 3 months

x_2 : O2 hrs / 3 months

► Περιορισμοί:

I. Όριο hr O1 : $x_1 \leq 550$

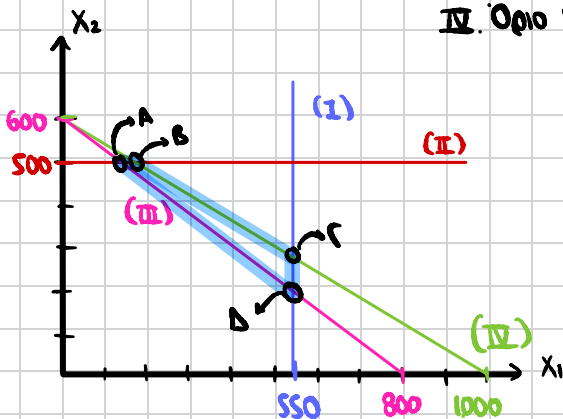
II. Όριο hr O2 : $x_2 \leq 500$

III. Ελάχιστη ασφαλ : $6x_1 + 8x_2 \geq 4800$

IV. Όριο κόστους : $6x_1 + 10x_2 \leq 6000$

► Αντικειμ συνάρτηση Z:

$\max Z = x_1 + x_2$



$$(I): \frac{x_1}{550} \leq 1$$

$$(II): \frac{x_2}{500} \leq 1$$

$$(III): \frac{x_1}{800} + \frac{x_2}{600} \geq 1$$

$$(IV): \frac{x_1}{1000} + \frac{x_2}{600} \leq 1$$

$$B: (x_1, x_2) = (166.67, 500) \Rightarrow Z_B = 666.67$$

$$C: (x_1, x_2) = (550, 270) \Rightarrow Z_C = 820$$

Μέγιστες ώρες:

$$\begin{cases} x_1 = 550 \\ x_2 = 270 \end{cases} \Rightarrow \max Z = 820$$

Λύση: κομή I, IV $\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{κορέσμ: I, IV} \\ \text{μη κορ: II, III} \end{cases}$

3.2 (1.5) Να διατυπωθεί το δυαδικό πρόβλημα, να προσδιοριστεί η βέλτιστη λύση του και να δοθεί η οικονομική ερμηνεία των μεταβλητών του.

Δυαδικό Πρόβλημα:

► Μεταβλητές:

y_1 : οριακή αξία ορίου ωρών O1 $\leftrightarrow x_1 \leq 550$ κορέσμ $\Rightarrow y_1 \neq 0$

y_2 : οριακή αξία ορίου ωρών O2 $\leftrightarrow x_2 \leq 500$ μη κορ $\Rightarrow y_2 = 0$

y_3 : οριακή αξία ελάχιστης ασφαλ $\leftrightarrow -6x_1 - 8x_2 \leq -4800$ μη κορ $\Rightarrow y_3 = 0$

y_4 : οριακή αξία ορίου κόστους $\leftrightarrow 6x_1 + 10x_2 \leq 6000$ κορέσμ $\Rightarrow y_4 \neq 0$

► Περιορισμοί:

$$\begin{cases} y_1 + 0 - 6y_3 + 6y_4 \geq 1 \\ 0 + y_2 - 8y_3 + 10y_4 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 + 6y_4 \geq 1 \\ 10y_4 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0.4 \\ y_4 = 0.1 \end{cases}$$

$$\text{► Ελαχιστοποίηση: } \min U = 550y_1 + 500y_2 - 4800y_3 + 6000y_4 \Rightarrow \min U = 820$$

$y_1 = 0.4 \Rightarrow$ αν αυξηθεί +1 ώρα / 3 μνη, οι μεξ ώρες ΑΥΞΑΝΟΝΤΑΙ κατά 0.4 hrs $\left\{ \begin{array}{l} \text{binding} \end{array} \right.$

$y_4 = 0.1 \Rightarrow$ αν αυξηθεί +1 ώρα / 3 μνη, οι μεξ ώρες ΑΥΞΑΝΟΝΤΑΙ κατά 0.1 hrs

$y_2 = y_3 = 0 \Rightarrow$ μικρές μεταβ στα όρια ασφαλ / κόστους δεν επηρεάζουν μέγιστες ώρες $\left\{ \begin{array}{l} \text{non-binding} \end{array} \right.$

3.3 (0.5) Λόγω μεγαλύτερης εμπειρίας, η εταιρεία εκτιμά ότι για κάθε ώρα εργασίας των δύο ομάδων, η παραγωγικότητα της δουλειάς της O2 είναι διπλάσια αυτής της O1. Αν η εταιρεία επιθυμούσε να μεγιστοποιήσει την παραγωγικότητα της δουλειάς των δύο ομάδων θα άλλαζε το πρόγραμμα απασχόλησης που υπολογίσατε στο Ερώτημα 3.1;

$$\max P = x_1 + 2x_2 \quad \begin{cases} B: (x_1, x_2) = (166.67, 500) \Rightarrow P_B = 1.166,67 \\ C: (x_1, x_2) = (550, 270) \Rightarrow P_C = 1090 \end{cases}$$

$$\text{Λύση: } \begin{cases} x_1 = 166.67 \\ x_2 = 500 \end{cases} \Rightarrow \max P = 1.166,67$$

κομή (II), (IV)
κορέσμ: II, IV
μη κορ: I, III

3.4 (0.5) Πόσο πρέπει να μικρύνει αναλογικά να είναι η δουλειά της O2 έναντι της O1 ώστε το πρόβλημα του Ερωτήματος 6 να έχει άπειρες λύσεις;

$$\begin{array}{ll}
 \text{P: } x_1 + 2x_2 & \rightarrow \lambda_P = -0.5 \\
 \text{II: } x_2 \leq 500 & \rightarrow \lambda_{II} = 0 \\
 \text{IV: } 6x_1 + 10x_2 \leq 6000 & \rightarrow \lambda_{IV} = -0.6
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{P: } x_1 + 2x_2 \\ \text{II: } x_2 \leq 500 \\ \text{IV: } 6x_1 + 10x_2 \leq 6000 \end{array}} \right\} \lambda_{II} < \lambda_P < \lambda_{IV} \text{ Άπειρες λύσεις } \Rightarrow \lambda_P = \lambda_{II} \Rightarrow \frac{-C'_1}{C'_2} = -\frac{3}{5} \Rightarrow \frac{C'_2}{C'_1} = \frac{5}{3} < 2$$