

Θέμα 1 (3.5 μονάδες)

Η εταιρεία PROFIL, που έχει έδρα στη Χώρα Α, δραστηριοποιείται στην κατασκευή κουφωμάτων αλουμινίου και της παρουσιάζεται μια εξαιρετικά συμφέρουσα ευκαιρία αγοράς 7.000 τόνων αλουμινίου προς 3.000 \$ τον τόνο από μία Χώρα Β. Εάν η PROFIL εισάγει το προϊόν, εκτιμάται ότι θα αποκομίσει τελικά κέρδη της τάξης των 30 εκ. \$ από τις πωλήσεις των κουφωμάτων στο τέλος του έτους. Το πρόβλημα επικεντρώνεται στο γεγονός ότι υπάρχει 50% πιθανότητα η κυβέρνηση της Χώρας Α να αρνηθεί την αίτηση εισαγωγής του αλουμινίου, διότι οι διπλωματικές σχέσεις της με την συγκεκριμένη χώρα δεν βρίσκονται σε καλό σημείο. Στην περίπτωση αυτή θα ακυρωθεί η αγορά, αλλά η PROFIL θα αναγκαστεί να πληρώσει πρόστιμο 550 \$ ανά τόνο στην Χώρα Β.

Η PROFIL εξετάζει διάφορες εναλλακτικές δράσεις. Η πρώτη είναι να αγοράσει το αλουμίνιο, να συμπληρώσει μόνη της την αίτηση εισαγωγής και να ελπίζει σε μια μετέπειτα έγκριση της αίτησης από το αρμόδιο όργανο της Χώρας Α. Η δεύτερη εναλλακτική είναι να υποβάλει την αίτηση έγκρισης πρώτα, να περιμένει το βούλευμα του οργάνου, και μετά να προχωρήσει στην αγορά. Στην περίπτωση αυτή ο CEO της PROFIL εκτιμά, από προηγούμενη του εμπειρία, ότι υπάρχει περίπου 70% πιθανότητα κάποιος άλλος ανταγωνιστής να κλείσει την συμφωνία.

Μια επόμενη εναλλακτική κίνηση είναι να προσλάβει μεγάλη συμβουλευτική εταιρεία, και να ζητήσει την εκτίμησή της για το αν η αίτηση θα εγκριθεί ή όχι στην περίπτωση που συμπληρώσει μόνη της την αίτηση. Η συμβουλευτική εταιρεία ζητά αμοιβή 100.000 \$ για την υπηρεσία της. Από προηγούμενη εμπειρία εκτιμάται ότι σε περίπτωση που η αίτηση εγκριθεί, η αναφορά της εταιρείας θα είναι θετική με πιθανότητα 90%. Στην περίπτωση όμως που η αίτηση απορριφθεί οι πληροφορίες της συμβουλευτικής εταιρείας δεν είναι αρκετές και η πιθανότητα η αναφορά της να είναι αρνητική είναι 60%.

Τέλος, η PROFIL μπορεί αγοράσει το αλουμίνιο (χωρίς δυνατότητα ακύρωσης της αγοράς) και να αναθέσει στην εξειδικευμένη εταιρεία FORCE να συντάξει την αίτηση εισαγωγής και να αναλάβει την έκδοση της σχετικής άδειας με αμοιβή 4 εκατ. \$. Η FORCE υποστηρίζει ότι μπορεί να εκδώσει την άδεια με πιθανότητα 90%. Αν η FORCE δεν καταφέρει να εκδώσει την άδεια, θα καταβάλει ως αποζημίωση 10 εκατ. \$ στην PROFIL. Στην περίπτωση αυτή η PROFIL εκτιμά ότι θα μπορούσε να πουλήσει το αλουμίνιο προς 2.000 \$ τον τόνο σε μία άλλη εταιρεία εκτός Χώρας Α με πιθανότητα 40%, ενώ διαφορετικά δε θα μπορέσει να αξιοποιήσει το αλουμίνιο.

1.1 (2.5) Να σχεδιαστεί το δέντρο αποφάσεων του προβλήματος. Να βρεθεί η βέλτιστη πολιτική επενδύσεων που πρέπει να ακολουθηθεί σύμφωνα με το κριτήριο του Bayes.

Κόστος = 21.000k

a1: αγοράζει

S_{11} (50%): έγκριση $\Rightarrow$ κέρδος = 30.000k $\left\{ \pi_{TK}(a_1) = 13.075k \right.$

S_{12} (50%): απόρριψη $\Rightarrow$ κόστος = -3.850k

a2: Περιμένει απόφαση

$\Rightarrow \pi_{TK}(a_2) = 4.500k$

S_{21} (50%): έγκριση $\Rightarrow$ κέρδος = $\max\{9.000k, 0\} = 9.000k$

a21: αγοράζει

S_{211} (30%): προλαβαίνει $\Rightarrow$ κέρδος = 30.000k $\left\{ \pi_{TK}(a_{21}) = 9.000k \right.$

S_{212} (70%): δεν προλαβαίνει $\Rightarrow$ κέρδος = 0

a22: δεν αγοράζει $\Rightarrow$ κέρδος = 0

S_{22} (50%): απόρριψη $\Rightarrow$ κέρδος = 0

a3: συνεργασία με FORCE

S_{31} (90%): έγκριση $\Rightarrow$ κέρδος = 30.000 - 4.000 = 26.000k

S_{32} (10%): απόρριψη $\Rightarrow \pi_{TK}(S_{32}) = \max\{-9.400k, -15.000k\} = -9.400k$

$\left\{ \pi_{TK}(a_3) = 22.460k \right.$

a321: προσνάθεια πώλησης αλλού

S_{3211} (40%): πώληση αλλού $\Rightarrow$ κέρδος = 7.000(2-3) + 6.000 = -1.000k $\left\{ \pi_{TK}(a_{321}) = -9.400k \right.$

S_{3212} (60%): αδυναμία πωλ $\Rightarrow$ κέρδος = -7.000·3 + 6.000 = -15.000k

a322: καμία προσνάθεια $\Rightarrow$ κέρδος = -15.000k

a4: δεν κάνει τίποτα $\Rightarrow$ κέρδος = 0 $\left\{ \pi_{TK}(a_4) = 0 \right.$

$\Rightarrow \pi_{TK}(χωρίς) = \max\{13.075, 9.000, 22.460, 0\} = 22.460k$

Συμβουλή E:	κόστος = -100k	$P(E_i S_j)$	(OS) S_{11}	(OS) S_{12}
E1: έγκριση αίτησης		E1	0.9	0.4
E2: απόρριψη αίτησης		E2	0.1	0.6

$$P(E1) = 0.5 \cdot 0.9 + 0.5 \cdot 0.1 = 0.65$$

$$P(E2) = 0.5 \cdot 0.1 + 0.5 \cdot 0.6 = 0.35$$

$P(S_j E_i)$	S_{11}	S_{12}
E1	0.69	0.31
E2	0.14	0.86

E1: (0.65)

$\pi_{TK}(a_1|E_1) = 19.506,5k$

$\pi_{TK}(a_2|E_1) = \pi_{TK}(a_2) = 4.500k$

$\pi_{TK}(a_3|E_1) = \pi_{TK}(a_3) = 22.460k$

$\pi_{TK}(a_4|E_1) = 0$

$\Rightarrow \pi_{TK}(E_1) = 22.460k$

E2: (0.35)

$\pi_{TK}(a_1|E_2) = 889k$

$\pi_{TK}(a_2|E_2) = \pi_{TK}(a_2) = 4.500k$

$\pi_{TK}(a_3|E_2) = \pi_{TK}(a_3) = 22.460k$

$\pi_{TK}(a_4|E_2) = 0$

$\Rightarrow \pi_{TK}(E_2) = 22.460k$

$\pi_{TK}(E) = \pi_{TK}(μ_E) = 22.460k$

1.2 (1.0) Να προσδιοριστεί η αξία της δευτερογενούς συμπληρωματικής πληροφορίας σχετικά με τις αποφάσεις της κυβέρνησης της Χώρας Β, εφόσον η PROFIL συμπληρώσει μόνη της την αίτηση.

Θέμα 2 (2.5 μονάδες)

Εταιρεία παραγωγής πλαστικών μπουκαλιών νερού προγραμματίζει την παραγωγή της για τις επόμενες 3 χρονικές περιόδους. Η εταιρεία παράγει το προϊόν σε παρτίδες των 1.000 τεμαχίων τις οποίες έχει τη δυνατότητα να διοχετεύσει απευθείας στους πελάτες της ή να αποθηκεύσει για χρήση σε επόμενες περιόδους. Ο αριθμός παρτίδων που μπορούν να παραχθούν σε μια περίοδο δεν μπορεί να υπερβεί μια δεδομένη δυναμικότητα. Ο αριθμός παρτίδων που μπορούν να αποθηκευτούν στις αποθήκες της εταιρείας ανέρχεται στις 5 παρτίδες. Η ζήτηση κάθε περιόδου σε παρτίδες είναι εκ των προτέρων γνωστή και μπορεί να ικανοποιηθεί από την παραγωγή εκείνης της περιόδου ή από αποθέματα προηγούμενων περιόδων. Το απόθεμα στην αρχή της πρώτης περιόδου είναι μηδέν ενώ στο τέλος της 3ης περιόδου απαιτείται η διατήρηση μιας παρτίδας ως απόθεμα για να χρησιμοποιηθεί σε επόμενες περιόδους. Το κόστος κάθε περιόδου αποτελείται από 2 συντελεστές: Κόστος παραγωγής, το οποίο είναι συνάρτηση του αριθμού των παρτίδων παραγωγής, κατά την εκάστοτε περίοδο, και κόστος αποθήκευσης της περιόδου, το οποίο είναι συνάρτηση του συνολικού αποθέματος που βρίσκεται στην αποθήκη, στο τέλος της περιόδου:

$$\text{Κόστος παραγωγής } C_v: C_v(x_v) = \begin{cases} 500x_v + (100 + 1 + v \cdot 100), & 0 < x_v \leq D_v, v = 1, \dots, 3 \\ 0, & x_v = 0 \end{cases}$$

$$\text{Κόστος αποθήκευσης: } H_v(a_v) = h_v \cdot a_v$$

Όπου v : η περίοδος, x_v : ο αριθμός παρτίδων παραγωγής, D_v : δυναμικότητα παρτίδων παραγωγής, a_v : το συνολικό απόθεμα στο τέλος της περιόδου v και h_v : κόστος αποθήκευσης ανά τεμάχιο προϊόντος.

Περίοδος (v)	Ζήτηση (zv) - σε τεμάχια προϊόντος	Δυναμικότητα Παραγωγής (Dv) - σε παρτίδες προϊόντος	Κόστος αποθήκευσης (hv) - ανά τεμάχιο προϊόντος
1	2,000	5	1
2	1,000	3	3
3	3,000	4	2

2.1 (2.5) Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του δυναμικού προγραμματισμού, προσδιορίστε το βέλτιστο πρόγραμμα παραγωγής που ικανοποιεί τη ζήτηση, ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό κόστος των επόμενων 3 περιόδων.

► Στάδια:

$n=1$: 3^{ος} μήνας

$n=2$: 2^{ος} μήνας

$n=3$: 1^{ος} μήνας

► Ζήτηση: $d_n = \{2k, 1k, 3k\}$

► μεταβ καταστάσεις: S_n τμχ ανη αποθήκη

► μεταβ απόφασης: X_n τμχ προς παραγωγή

$$S_{n-1} = S_n + X_n - d_n, S_1(\cdot) = S_3(\cdot) = 0$$

$$S_0 = 1, S_5 = 0$$

► Κόστος:

$$C_{\text{par}}(X_n) = (500X_n + 100(v+1)) \cdot 1 \text{ } \forall X_n \neq 0$$

$$C_{\text{anod}}(S_n) = h_n \cdot (S_n + S_n - d_n - n)$$

► Ελαχιστοποίηση κόστους:

$$F_n(S_n, X_n) = C_{\text{anod}}(S_n) + C_{\text{par}}(X_n) + F_{n-1}^*(S_n, X_n)$$

$$F_n^*(S_n, X_n) = \min \{F_n(S_n + X_n - d_n, n)\}$$

να μείνει 1 παρτίδα

Βήμα $n=1$ ($d_1=3k$) πρέπει $S_1 + X_1 = 4k$

$$F_1(X_1, S_1) = (500X_1 + 400) \cdot 1 \text{ } \forall X_1 \neq 0 + 2 \cdot 1k + F_0(S_1, X_1)$$

$S_1 \backslash X_1$	0	1k	2k	3k	4k
0	x	x	x	x	24+2+0
1k	x	x	x	19+2+0	x
2k	x	x	14+2+0	x	x
3k	x	09+2+0	x	x	x
4k	0+2+0	x	x	x	x

$S_1 \backslash X_1$	0	1k	2k	3k	4k	$F_1^*(S_1)$	X_1^*
0	x	x	x	x	44	44	4k
1k	x	x	x	39	x	39	3k
2k	x	x	34	x	x	34	2k
3k	x	29	x	x	x	29	1k
4k	2	x	x	x	x	2	0

Βήμα $n=2$ ($d_2=1k$ τμχ) $X_2 + S_2 = 1 \text{ } \forall 2 \text{ } \forall 3 \text{ } \forall 4 \text{ } \forall 5$

$$F_2(S_2, X_2) = (500X_2 + 300) \cdot 1 \text{ } \forall X_2 \neq 0 + 3(X_2 + S_2 - d_2) + F_1^*(S_2 + X_2 - 1)$$

$S_2 \backslash X_2$	0	1k	2k	3k
0	x	08+0+44	13+3+39	18+6+34
1k	0+0+44	08+3+39	13+6+34	18+9+29
2k	0+3+39	08+6+34	13+9+29	18+12+2
3k	0+6+34	08+9+29	13+12+2	x

$S_2 \backslash X_2$	0	1k	2k	3k	$F_2^*(S_2)$	X_2^*
0	x	52	82	112	52	1k
1k	44	77	107	137	44	0
2k	69	102	132	158	69	0
3k	94	127	153	x	94	0

Βήμα $n=3$ ($d_3=2k$ τμχ) $S_3=0$, $X_3 + S_3 = 2 \text{ } \forall 3 \text{ } \forall 4 \text{ } \forall 5$

$$F_3(S_3, X_3) = (500X_3 + 200) \cdot 1 \text{ } \forall X_3 \neq 0 + 1(X_3 + S_3 - d_3) + F_2^*(S_3 + X_3 - 2)$$

$S_3 \backslash X_3$	0	1k	2k	3k	4k	5k	$F_3^*(S_3)$	X_3^*
0	x	x	12+0+52	17+1+44	23+2+69	28+3+94	64	2k
	x	x	64	71	112	152		

Βέλτιστη Στρατηγική: $2k \rightarrow 1k \rightarrow 4k$

Θέμα 3 (4 μονάδες)

Εργοστάσιο επεξεργασίας τροφίμων έχει υπογράψει σύμβαση με αγροτικό συνεταιρισμό για την αγορά ντομάτας σε δύο διαφορετικές ποικιλίες, την υβριδική (Π1) και τη συμβατική (Π2). Μέσω της επεξεργασίας των δύο ποικιλιών (Π1 και Π2), το εργοστάσιο παράγει σάλτσα, τοματοπολτό, κέτσαπ και φυσικό χυμό.

Το κόστος προμήθειας της ποικιλίας Π1 είναι 2,7 €/kg (ευρώ ανά κιλό) και της Π2 1,8 €/kg, ενώ η σύμβαση του εργοστασίου με τον συνεταιρισμό το υποχρεώνει να αγοράζει ελάχιστη ποσότητα 500 kg/ημέρα ποικιλίας Π1. Η ποσότητα των παραγόμενων υποπροϊόντων από την επεξεργασία καθεμιάς ποικιλίας ντομάτας, καθώς και η τιμή πώλησης των υποπροϊόντων αυτών εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα, μαζί με το πρόσθετο κόστος επεξεργασίας των δύο ποικιλιών. Η ελάχιστη ημερήσια ζήτηση τοματοπολτού είναι 120+Λ kg/ημέρα. Στόχος του εργοστασίου αποτελεί η μεγιστοποίηση των ημερήσιων κερδών του από την πώληση των παραγόμενων υποπροϊόντων.

	Υβριδική Ποικιλία Π1	Συμβατική Ποικιλία Π2	Μέγιστη δυνατή παραγωγή	Τιμή πώλησης
Σάλτσα	80%	44%	2.650 kg/ημέρα	4 €/kg
Τοματοπολτός	5%	10%	220 kg/ημέρα	2,6 €/kg
Κέτσαπ	10%	36%	660 kg/ημέρα	2 €/kg
Φυσικός Χυμός	5%	10%	—	1 €/kg
Κόστος επεξεργασίας	0,1 €/kg	0,18 €/kg		

3.1 (1.5) Ως διευθυντής παραγωγής, καλείστε να διατυπώσετε και να επιλύσετε το μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού που μεγιστοποιεί τα ημερήσια κέρδη του εργοστασίου.

► Μεταβλητές:

x_1 : Π1 kg/day
 x_2 : Π2 kg/day

► Περιορισμοί:

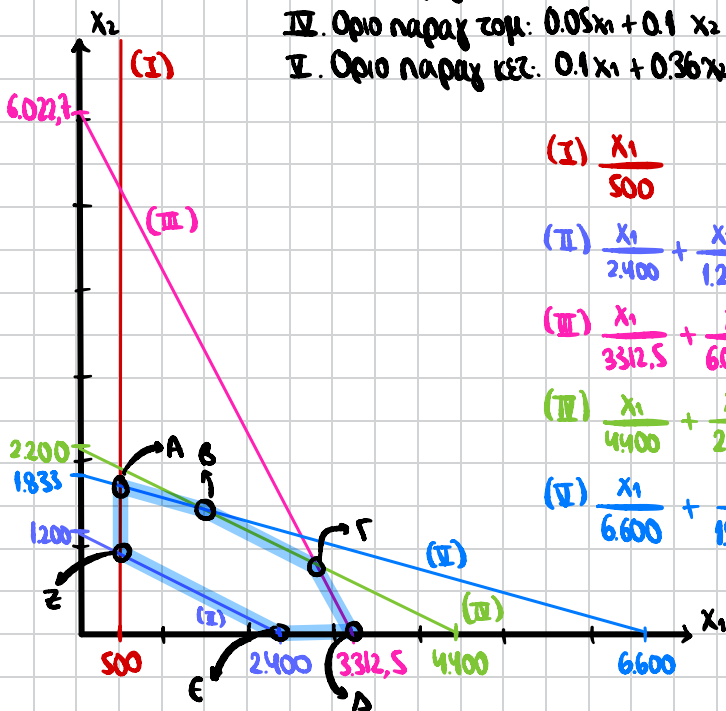
- Ελάχ x_1 : $x_1 \geq 500$
- Ελάχ ντομάτοτ: $0.05x_1 + 0.1x_2 \geq 120$
- Οριο παραχ σάλ: $0.8x_1 + 0.44x_2 \leq 2650$
- Οριο παραχ τομ: $0.05x_1 + 0.1x_2 \leq 220$
- Οριο παραχ κέτ: $0.1x_1 + 0.36x_2 \leq 660$

► Αντικείμε συνάρτηση Z:

$$C_1 = 0.8 \cdot 4 + 0.05 \cdot 2.6 + 0.1 \cdot 2 + 0.05 \cdot 1 - 0.1 \cdot 2.7 = 0.78$$

$$C_2 = 0.44 \cdot 4 + 0.1 \cdot 2.6 + 0.36 \cdot 2 + 0.1 \cdot 1 - 0.18 \cdot 1.8 = 0.86$$

$$\max Z = 0.78x_1 + 0.86x_2$$



$$(I) \frac{x_1}{500} \geq 1$$

$$(II) \frac{x_1}{2400} + \frac{x_2}{1200} \geq 1$$

$$(III) \frac{x_1}{3312.5} + \frac{x_2}{6022.7} \leq 1$$

$$(IV) \frac{x_1}{4400} + \frac{x_2}{2200} \leq 1$$

$$(V) \frac{x_1}{6600} + \frac{x_2}{1833.3} \leq 1$$

$$B: (x_1, x_2) = (1650, 1315) \Rightarrow Z_B = 2489.5$$

$$C: (x_1, x_2) = (2900, 750) \Rightarrow Z_C = 2907$$

Μεγιστοποίηση Κέρδους:

$$\begin{cases} x_1 = 2900 \\ x_2 = 750 \end{cases} \Rightarrow \max Z = 2907$$

Λύση: III ∩ IV ⇒ $\begin{cases} \text{κορεσμένοι: III, IV} \\ \text{μη κορεσμ: I, II, V} \end{cases}$

3.2 (1.5) Να διατυπωθεί το δυαδικό πρόβλημα, να προσδιοριστεί η βέλτιστη λύση του και να δοθεί η οικονομική ερμηνεία των μεταβλητών του.

Δυαδικό Πρόβλημα:

► Μεταβλητές:

- $$y_1: \text{οριακή αξία ελάχ ποσότητας } x_1 \leftrightarrow -x_1 \leq -500$$
- $$y_2: \text{οριακή αξία ελάχ ντομάτοτ} \leftrightarrow -0.05x_1 - 0.1x_2 \leq -120$$
- $$y_3: \text{οριακή αξία ορίου παραχ σάλτσας} \leftrightarrow 0.8x_1 + 0.44x_2 \leq 2650$$
- $$y_4: \text{οριακή αξία ορίου παραχ τοματ} \leftrightarrow 0.05x_1 + 0.1x_2 \leq 220$$
- $$y_5: \text{οριακή αξία ορίου παραχ κέτσαπ} \leftrightarrow 0.1x_1 + 0.36x_2 \leq 660$$

$$\text{μη κορ} \Rightarrow y_1 = 0$$

$$\text{μη κορ} \Rightarrow y_2 = 0$$

$$\text{κορεσμ} \Rightarrow y_3 \neq 0$$

$$\text{κορεσμ} \Rightarrow y_4 \neq 0$$

$$\text{μη κορ} \Rightarrow y_5 = 0$$

► Περιορισμοί:

$$-y_1 - 0.05y_2 + 0.8y_3 + 0.05y_4 + 0.1y_5 \geq 0.78 \sim \text{ορ κέρδος 1€ τιμής Π1}$$

$$0 - 0.1y_2 + 0.44y_3 + 0.1y_4 + 0.36y_5 \geq 0.86 \sim \text{ορ κέρδος 1€ τιμής Π2}$$

$$\begin{cases} y_1 = y_2 = 0 \\ y_3 \neq 0 \\ y_4 \neq 0 \\ y_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0.8y_3 + 0.05y_4 \leq 0.78 \\ 0.44y_3 + 0.1y_4 \leq 0.86 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_3 = 0.603448 \\ y_4 = 5.944828 \end{cases}$$

▷ Ελαχιστοποίηση: $\min U = -500 y_1 - 120 y_2 + 2650 y_3 + 220 y_4 + 660 y_5 \rightarrow \min U = 2907$

$y_3 = 0.603448 \rightarrow$ αν αυξηθεί το όριο παραχ σαλτ 1 kg, το μέγ κέρδος ΑΥΞΑΝΕΤΑΙ κατά 0.603448

$y_4 = 5.944828 \rightarrow$ αν αυξηθεί το όριο παραχ τσιματ 1 kg, το μέγ κέρδος ΑΥΞΑΝΕΤΑΙ κατά 5.944828

$y_1 = y_2 = y_5 = 0 \rightarrow$ μικρές μεταβολές δεν επηρεάζουν το μέγ κέρδος (non-binding)

3.3 (1.0) Πόσο πρέπει να μειωθεί η τιμή πώλησης της σάλτσας ανά κιλό ώστε το πρωτεύον πρόβλημα να έχει άπειρες λύσεις, αν όλα τα υπόλοιπα δεδομένα παραμείνουν σταθερά;

$$\begin{array}{l} \text{I. } 0.78 x_1 + 0.87 x_2 \rightarrow \lambda_2 = -0.897 \\ \text{III. } 0.8 x_1 + 0.44 x_2 \leq 2650 \rightarrow \lambda_{\text{III}} = -1.818 \\ \text{IV. } 0.05 x_1 + 0.1 x_2 \leq 220 \rightarrow \lambda_{\text{IV}} = -0.5 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{I.} \\ \text{III.} \\ \text{IV.} \end{array}} \right\} \lambda_{\text{III}} < \lambda_2 < \lambda_{\text{IV}} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{I.} \\ \text{III.} \\ \text{IV.} \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{Η τιμή της σάλτσας μειώνεται κατά } x: \\ C_1(x) = 0.78 - 0.8x \\ C_2(x) = 0.86 - 0.44x \end{array}$$

$$\lambda_2 = \lambda_{\text{III}} \Rightarrow -\frac{0.78 - 0.8x}{0.86 - 0.44x} = \frac{-0.05}{0.1} \Rightarrow x = 0.603448 \text{ €/kg σάλτσας}$$