

Θέμα 1 (3 μονάδες)

Η επιχείρηση IRON AE δραστηριοποιείται στο χώρο παραγωγής και εμπορίας σιδήρου. Αυτή την περίοδο εξετάζει το ενδεχόμενο διεύρυνσης των πωλήσεών της στην ευρωπαϊκή αγορά. Στο πλαίσιο αυτό η IRON έχει τη δυνατότητα να δημιουργήσει θυγατρικές εταιρείες σε δέκα ευρωπαϊκές χώρες με κόστος κατά μέσο όρο 400.000 €/εταιρεία. Το τμήμα marketing της επιχείρησης ισχυρίζεται ότι υπάρχει πιθανότητα 0,80 να δημιουργηθεί μεγάλη ζήτηση των προϊόντων στην αγορά με εκτιμώμενα συνολικά έσοδα της τάξης των 20,0 εκ. €, και πιθανότητα 0.2 να δημιουργηθεί μικρή ζήτηση με εκτιμώμενα συνολικά έσοδα της τάξης των 14 εκ. €.

Εναλλακτικά, η IRON εξετάζει το ενδεχόμενο συνεργασίας με την STEEL, ώστε να αναλάβει την προώθηση των προϊόντων της IRON στην ευρωπαϊκή αγορά. Όμως, επειδή η STEEL συνεργάζεται και με άλλες ομοειδείς επιχειρήσεις, υπάρχει πιθανότητα 0,20 να προωθήσει σε μεγάλο βαθμό τα προϊόντα της IRON, επιφέροντας κέρδη της τάξης των 18 εκ. € και 0,80 να δώσει βάρος στην προώθηση προϊόντων άλλων επιχειρήσεων περιορίζοντας έτσι τα κέρδη της IRON. Στη δεύτερη περίπτωση, η IRON έχει τη δυνατότητα να αυξήσει την προμήθεια που δίνει στην STEEL, δίνοντάς της κίνητρο για την προώθηση των δικών της προϊόντων έναντι άλλων, γεγονός που θα επιφέρει κέρδη της τάξης των 12 εκ. €. Εναλλακτικά, μπορεί να δώσει εκπτώσεις και να ενισχύσει την δυνατότητα πώλησης στους τελικούς πελάτες, ώστε να τονώσει τη ζήτηση, έχοντας εκτιμώμενα κέρδη της τάξης των 14 εκ. €.

Στην περίπτωση αυτή υπάρχει πιθανότητα 10% δημιουργίας επισφαλειών στην πληρωμή από τους τελικούς πελάτες, μειώνοντας έτσι τα εκτιμώμενα κέρδη κατά 3,0 εκ. €.

Τέλος, η διοίκηση προτίθεται να προσλάβει μια εταιρεία συμβούλων με αμοιβή 10.000 € για να εκτιμήσουν με βάση τα στοιχεία της αγοράς τον βαθμό προώθησης των προϊόντων της από την STEEL. Σε αντίστοιχες περιπτώσεις, η εταιρεία συμβούλων είχε 0,10 πιθανότητα αποτυχίας στην πρόβλεψη μεγάλου βαθμού προώθησης των προϊόντων και 78% επιτυχία στη πρόβλεψη μικρού βαθμού προώθησης των προϊόντων.

1.1 (2.0) Να σχεδιαστεί το δέντρο αποφάσεων του προβλήματος και να προσδιοριστεί η βέλτιστη πολιτική που πρέπει να ακολουθηθεί απ' την IRON A.E. σύμφωνα με το κριτήριο του Bayes.

a_1 : δnm 10 κατασε $\Rightarrow$ κόστος = 4m

$S_{11}(0.8)$: μεγάλη ζήτηση: έσοδα = 20m $\Rightarrow$ κέρδος = 16m
 $S_{12}(0.2)$: μικρή ζήτηση: έσοδα = 14m $\Rightarrow$ κέρδος = 10m

$$\left. \begin{array}{l} S_{11}(0.8) \\ S_{12}(0.2) \end{array} \right\} \pi TK(a_1) = 16 \cdot 0.8 + 10 \cdot 0.2 = 14.8$$

a_2 : συνεργασία

$S_{21}(0.2)$: μεγάλη προώθηση: κέρδος = 18m

$S_{22}(0.8)$: μικρή προώθηση: $\pi TK(S_{22}) = \max(12, 13.7) = 13.7$

$$\left. \begin{array}{l} S_{21}(0.2) \\ S_{22}(0.8) \end{array} \right\} \pi TK(a_2) = 18 \cdot 0.2 + 13.7 \cdot 0.8 = 14.56$$

a_{21} : προμήθεια: κέρδη = 12m

a_{22} : πίσωση:

$$\left. \begin{array}{l} S_{221}(0.9) \\ S_{222}(0.1) \end{array} \right\} \pi TK(a_{22}) = 0.9 \cdot 14 + 0.1 \cdot 11 = 13.7$$

a_3 : καμία ενέργεια $\Rightarrow$ κέρδος = 0 $\Rightarrow \pi TK(a_3) = 0$

$$\Rightarrow \pi TK(\text{χωρίς}) = \max\{14.8, 14.56, 0\} = 14.8 \sim a_1$$

Συμβούλοι: κόστος - 0.01m	$P(G S_j)$	(a_2)	(0.8)
		S_{21}	S_{22}
E_1 : μεγάλη προώθηση	E_1	0.9	0.22
E_2 : μικρή προώθηση	E_2	0.1	0.78

$$P(E_1) = 0.9 \cdot 0.2 + 0.22 \cdot 0.8 = 0.356$$

$$P(E_2) = 0.1 \cdot 0.2 + 0.78 \cdot 0.8 = 0.644$$

$P(S_j G_i)$	S_{21}	S_{22}
E_1	50.56%	49.44%
E_2	3.1%	96.9%

E_1 : (0.356)

$$\pi TK(a_1|E_1) = \pi TK(a_1) = 14.8$$

$$\pi TK(a_2|E_1) = 18 \cdot 0.5056 + 13.7 \cdot 0.4944 = 15.87$$

$$\pi TK(a_3|E_1) = 0$$

$$\Rightarrow \pi TK(E_1) = 15.87$$

E_2 : (0.644)

$$\pi TK(a_1|E_2) = \pi TK(a_1) = 14.8$$

$$\pi TK(a_2|E_2) = 18 \cdot 0.031 + 13.7 \cdot 0.969 = 13.83$$

$$\pi TK(a_3|E_2) = 0$$

$$\Rightarrow \pi TK(E_2) = 14.8$$

$$\pi TK(E) = \pi TK(\mu E) =$$

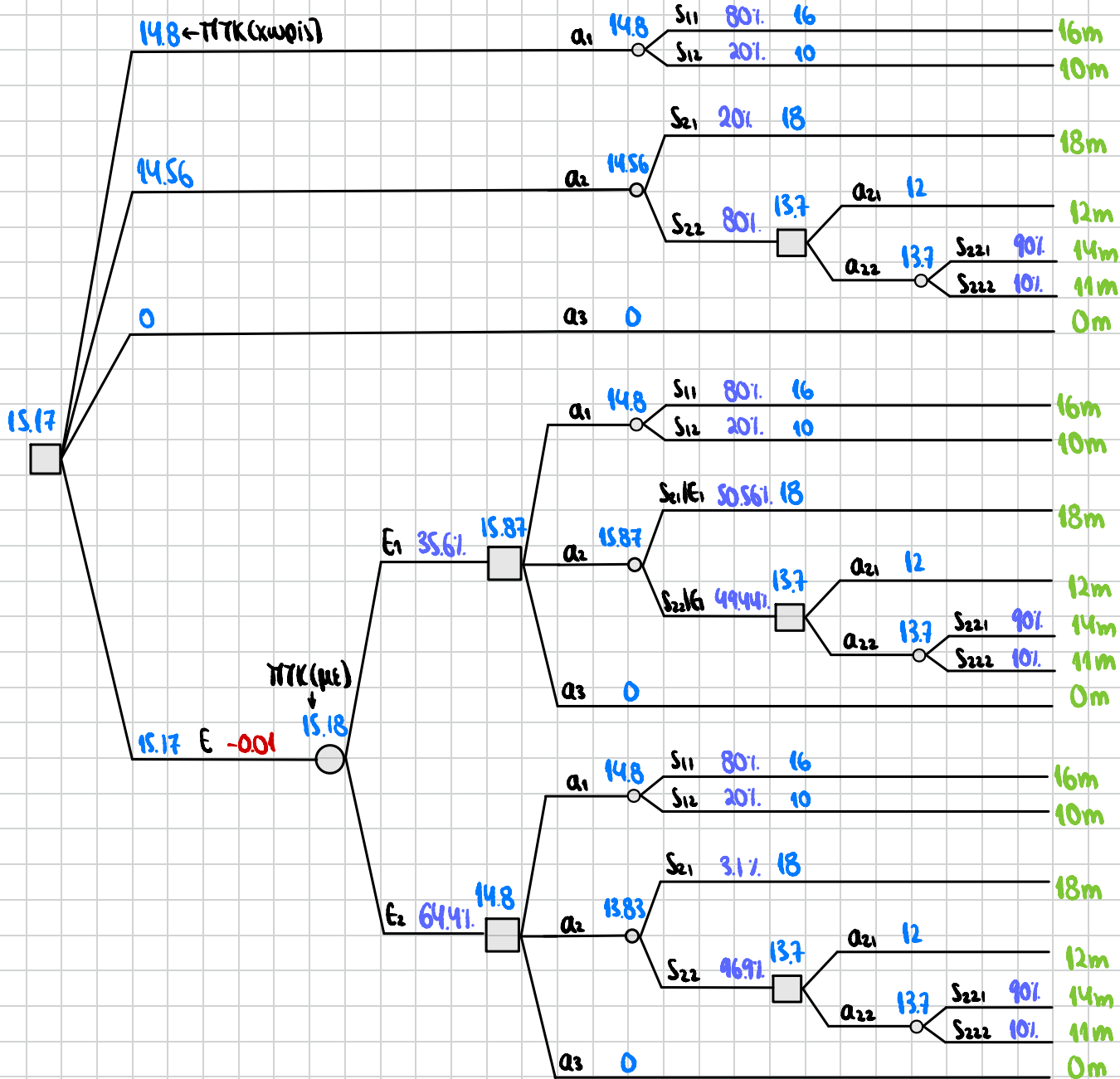
$$15.87 \cdot 0.356 + 14.8 \cdot 0.644 = 15.18$$

1.2 (1.0) Να προσδιοριστεί η αξία της δειγματοληπτικής πληροφορίας καθώς και η αξία της πλήρους πληροφορίας.

$$\text{Δειγματολ: } \pi \Delta \pi \pi = \pi TK(\mu E) - \pi TK(\text{χωρίς}) = 15.18 - 14.8 = 0.38m > 0.01m \sim \text{συμφέρει}$$

$$\text{Πλήρους: } \pi TK \pi \pi = P(S_{21}) \cdot K_{21}^* + P(S_{22}) \cdot K_{22}^* = 0.2 \cdot 18 + 0.8 \cdot 14.8 = 15.44m$$

$$\pi \Delta \pi \pi = \pi TK \pi \pi - \pi TK(\text{χωρίς}) = 15.44 - 14.8 = 0.64m > \pi \Delta \pi \pi$$



Βέλτιστη Ίσρατητική:

σύμβουλοι:
 ↗ μεγάλη προωθ — συνεργασία
 ↘ μικρή προωθ — μόνη της

Θέμα 2 (2.5 μονάδες)

Φορέας πιστοποίησης συστημάτων ποιότητας διαθέτει 3 εργαζόμενους οι οποίοι πραγματοποιούν ελέγχους σε έγγραφα εταιρειών, που ζητούν να λάβουν την εν λόγω πιστοποίηση, και πραγματοποιούν τις διαπιστεύσεις συμβατότητας με τους κανόνες των προτύπων. Οι πιστοποιητές όμως που έχει στη διάθεσή του ο φορέας βρίσκονται στην κατώτερη βαθμίδα με αποτέλεσμα να υπάρχουν σημαντικές καθυστερήσεις στον έλεγχο.

Με στόχο την αύξηση της παραγωγικότητας, ο γενικός διευθυντής αποφάσισε να επενδύσει 1.200 ευρώ προκειμένου οι πιστοποιητές να παρακολουθήσουν σεμινάρια και να ανέβουν βαθμίδα, κάτι που θα τους επιτρέψει να ελέγχουν ταχύτερα τα απαραίτητα έγγραφα. Μετά από μελέτη που έγινε από το οικονομικό τμήμα της εταιρείας προέκυψε ότι η βελτίωση στον αριθμό εγγράφων τη μέρα που μπορεί να ελέγξει ο κάθε πιστοποιητής είναι ανάλογη με το ποσό που θα επενδυθεί σε αυτόν και μάλιστα διαφέρει από πιστοποιητή σε πιστοποιητή σύμφωνα με τον πίνακα.

Έγγραφο/μέρα	Επενδύόμενο ποσό			
Πιστοποιητές	300.00 €	600.00 €	900.00 €	1,200.00 €
Π1	5	16	20	23
Π2	7	9	15	25
Π3	3	10	17	21,5

Βαθμίδα: $n=1: \pi_1$
 $n=2: \pi_2$
 $n=3: \pi_3$

2.1 (2.0) Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του δυναμικού προγραμματισμού, προσδιορίστε τη βέλτιστη πολιτική κατανομής του διαθέσιμου κεφαλαίου, έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί ο αριθμός πρόσθετων εγγράφων που μπορούν να ελέγξουν οι πιστοποιητές του φορέα.

Μεταβλ κατάστασης $s_n \in \{0, 300, 600, 900, 1,200\}$: ποσό διαθέσιμο στην αρχή του n } μεταβλ κατάστασης:
 Μεταβλ απόφασης $x_n \in \{0, 300, 600, 900, 1,200\}$: ποσό που επενδύεται στο n } $s_{n+1} = s_n - x_n$

Έγγραφα ανα μέρα: $\pi_1 \times p_1(x) = \{0, 5, 16, 20, 23\}$
 $\pi_2 \times p_2(x) = \{0, 7, 9, 15, 25\}$
 $\pi_3 \times p_3(x) = \{0, 3, 10, 17, 21,5\}$

Αναδρομική σχέση: $F_n(s_n, x_n) = P_{n+1}(x_n) + F_{n+1}^*(s_{n+1})$
 $F_n^*(s_n) = \max_{0 \leq x \leq s_n} F_n(s_n, x_n), F_0^*(\cdot) = 0$

Βήμα $n=1 \rightsquigarrow F_1(s_1, x_1) = P_2(x_1) + F_0^*(s_1 - x_1) = P(x_1)$

s_1	0	300	600	900	1,200
$F_1^*(s_1)$	0	3	10	17	21.5
x_1^*	0	300	600	900	1,200

$$300 - 300 = 0$$

Βήμα $n=2 \rightsquigarrow F_2(s_2, x_2) = P_3(x_2) + F_1^*(s_2 - x_2) \rightarrow \forall s_2 = 0, 300, 600, 900, 1,200, x_2 = 0 \dots s_2$

$s_2 \setminus x_2$	0	300	600	900	1,200
0	0+0				
300	0+3	7+0			
600	0+10	7+3	9+0		
900	0+17	7+10	9+3	15+0	
1,200	0+21.5	7+17	9+10	15+3	25+0

$s_2 \setminus x_2$	0	300	600	900	1,200	$F_2^*(s_2)$	x_2^*
0	0					0	0
300	3	7				7	300
600	10	10	9			10	0,300
900	17	17	12	15		17	0,300
1,200	21.5	24	19	18	25	25	1,200

Βήμα $n=3 \rightsquigarrow F_3(s_3, x_3) = P_4(x_3) + F_2^*(s_3 - x_3) \rightarrow \forall s_3 = 0, 300, 600, 900, 1,200, x_3 = 0 \dots s_3$

$s_3 \setminus x_3$	0	300	600	900	1,200	$F_3^*(s_3)$	x_3^*
1,200	0+25	5+17	16+10	20+7	23+0	27	900
	25	22	26	27	23		

$$1,200 - 900 = 300$$

Βέλτιστη Στρατηγική:
 π_1 : 900 € 20 εκκ/μέρα
 π_2 : 300 € 7 εκκ/μέρα
 π_3 : 0 € 0 εκκ/μέρα
 1,200 € 27

2.2 (0.5) Ποια η βασική διαφορά μεταξύ των προβλημάτων ντετερμινιστικού και πιθανοτικού δυναμικού προγραμματισμού;

Ντετερμινιστικός ΔΠ: Όλες οι παράμετροι και τα αποτελέσματα των αποφάσεων είναι γνωστά και βέβαια.

Πιθανοτικός ΔΠ: Ορισμένες παράμετροι ή τα αποτελέσματα είναι τυχαία και αβέβαια, και περιγράφονται μέσω πιθανοτήτων.

Θέμα 3 (4.5 μονάδες)

Τηλεφωνικό κέντρο εταιρείας παροχής ηλεκτρισμού διαθέτει 10 υπάλληλους για την εξυπηρέτηση πελατών, οι οποίοι μπορούν να εργάζονται είτε με φυσική παρουσία από τα γραφεία της εταιρείας, είτε με τηλεργασία. Κάθε υπάλληλος που εργάζεται στα γραφεία της εταιρείας κοστίζει 4 €/ώρα εργασίας, ενώ κάθε υπάλληλος που εργάζεται μέσω τηλεργασίας κοστίζει 3 €/ώρα εργασίας καθώς δεν απαιτείται αποζημίωση για την μεταφορά στο χώρο εργασίας. Ωστόσο, εξαιτίας καλύτερης ποιότητας διασύνδεσης στο διαδίκτυο στα γραφεία της εταιρείας, οι υπάλληλοι που εργάζονται με φυσική παρουσία έχουν τη δυνατότητα κατά μέσο όρο να εξυπηρετούν 10 τηλεφωνήματα/ώρα εργασίας, ενώ μέσω τηλεργασίας, ο αριθμός αυτός μειώνεται στα 8 τηλεφωνήματα/ώρα εργασίας. Κάθε υπάλληλος ανεξαρτήτως του τόπου εργασίας, απασχολείται για 160 ώρες το μήνα. Η εταιρεία εκτιμά ότι κατά μέσο όρο δέχεται τουλάχιστον 14.000 τηλεφωνήματα το μήνα, και θέλει να προγραμματίσει τον τρόπο με τον οποίο θα εργάζονται οι υπάλληλοι της τον επόμενο μήνα, προκειμένου να καλύψει αυτή τη ζήτηση, ελαχιστοποιώντας τα κόστη της. Είναι γνωστό ότι 3 από τους 10 υπάλληλους έχουν ζητήσει να εργαστούν με φυσική παρουσία και 2 με τηλεργασία. Με δεδομένο ότι υπάρχει η δυνατότητα για υβριδική μορφή εργασίας εντός του μήνα, ένας υπάλληλος έχει ζητήσει να εργαστεί με φυσική παρουσία για τουλάχιστον 8 ώρες.

3.1 (1.5) Ως διευθυντής προσωπικού, καλείστε να επιλύσετε γραφικά το μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού που ελαχιστοποιεί τα κόστη του τηλεφωνικού κέντρου της εταιρείας.

► Μεταβλητές:

x_1 : on-site hrs / month

x_2 : remote hrs / month

► Αντικείμενο συνάρτηση z :

$$\min z = 4x_1 + 3x_2$$

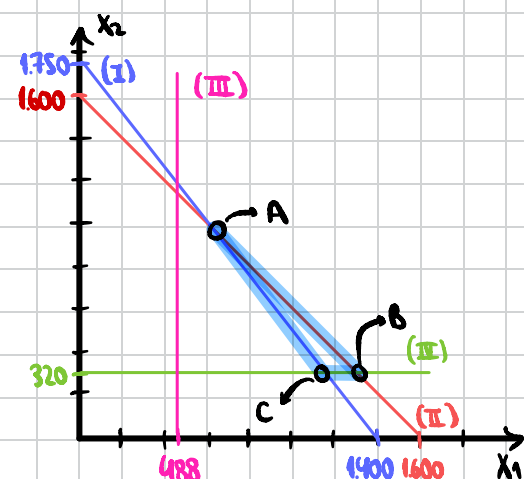
► Περιορισμοί:

I. Ζήτηση κλήσεων: $10x_1 + 8x_2 \geq 14.000$

II. Συνολικές ώρες: $x_1 + x_2 \leq 1600$

III. Ελάχιστες on-site: $x_1 \geq 488$

IV. Ελάχιστες remote: $x_2 \geq 320$



$$(I): \frac{x_1}{1400} + \frac{x_2}{1750} \geq 1$$

$$(II): \frac{x_1}{1600} + \frac{x_2}{1600} \leq 1$$

$$(III): \frac{x_1}{488} \geq 1$$

$$(IV): \frac{x_2}{320} \geq 1$$

$$A: (x_1, x_2) = (600, 1000) \Rightarrow z_A = 5400$$

$$B: (x_1, x_2) = (1144, 320) \Rightarrow z_B = 5536$$

Ελάχιστο κόστος:

$$\begin{cases} x_1 = 600 \\ x_2 = 1000 \end{cases} \Rightarrow \min z = 5400$$

Λύση: I & II $\Rightarrow$ Κορεσμένοι περιορισμοί: I, II
Μη κορεσμένοι περιορισμοί: III, IV

3.2 (1.5) Να διατυπωθεί το δυαδικό πρόβλημα, να προσδιοριστεί η βέλτιστη λύση του και να δοθεί η οικονομική ερμηνεία των μεταβλητών του.

Δυαδικό Πρόβλημα:

► Μεταβλητές:

y_1 : οριακή αξία ζήτησης τηλεφών $\leftarrow 10x_1 + 8x_2 \geq 14.000$

y_2 : οριακή αξία διαθέσιμων ωρών εργασίας $\leftarrow x_1 + x_2 \leq 1600$

y_3 : οριακή αξία ελαχ on-site εργασίας $\leftarrow x_1 \geq 488$

y_4 : οριακή αξία ελαχ remote εργασίας $\leftarrow x_2 \geq 320$

κορεσμ $\Rightarrow y_i \neq 0$

κορεσμ $\Rightarrow y_i \neq 0$

μη κορ $\Rightarrow y_i = 0$

μη κορ $\Rightarrow y_i = 0$

► Περιορισμοί:

$10y_1 - y_2 + y_3 + 0 \leq 4 \sim$ οριακό κόστος 1 ώρας on-site

$8y_1 - y_2 + 0 + y_4 \leq 3 \sim$ οριακό κόστος 1 ώρας remote

$$\begin{cases} 10y_1 - y_2 \leq 4 \\ 8y_1 - y_2 \leq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0.5 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

► Μεγιστοποίηση: $\max U = 14.000y_1 - 1600y_2 + 488y_3 + 320y_4 \Rightarrow \max U = 5400$

$y_1 = 0.5 \Rightarrow$ αν απαιτηθεί +1 κλήση/μήνα, το ελαχ κόστος ΑΥΞΑΝΕΤΑΙ κατά 0.5€ } binding constraints
 $y_2 = 1 \Rightarrow$ αν αυξηθεί το όριο +1 ώρα, το ελαχ κόστος ΜΕΙΩΝΕΤΑΙ κατά 1€ } binding constraints
 $y_3 = y_4 = 0 \Rightarrow$ μικρές μεταβ αλλ ελάχιστες ώρες on-site / remote δεν επηρ το ελαχιστο κόστος } non-binding

3.3 (0.5) Πόσο πρέπει να μειωθεί το κόστος αποζημίωσης των υπαλλήλων που εργάζονται με φυσική παρουσία ώστε το πρωτεύον πρόβλημα να έχει άπειρες λύσεις, αν όλα τα υπόλοιπα δεδομένα παραμείνουν σταθερά;

$$\begin{aligned} Z &= 4x_1 + 3x_2 \Rightarrow \lambda_Z = -1.33 \\ \text{I. } x_1 + x_2 &= 1600 \Rightarrow \lambda_I = -1 \\ \text{II. } 10x_1 + 8x_2 &= 14000 \Rightarrow \lambda_{II} = -1.25 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} Z &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{I. } x_1 + x_2 &= 1600 \\ \text{II. } 10x_1 + 8x_2 &= 14000 \end{aligned}} \right\} \lambda_Z < \lambda_I < \lambda_{II} \text{ Για άπειρες λύσεις: } \lambda_Z = \lambda_I \Rightarrow \frac{-C'_1}{3} = \frac{-S}{4} \Rightarrow C'_1 = 3.75\epsilon \Rightarrow 0.25\epsilon \text{ μείωση}$$

3.4 (0.5) Αν η εταιρεία είχε στόχο να μεγιστοποιήσει τον αριθμό κλήσεων τον οποίο μπορεί να εξυπηρετήσει ανεξαρτήτως κόστους, πώς θα άλλαζε το πρόβλημα του ερωτήματος 3.1 και η αντίστοιχη κατανομή υπαλλήλων;

► Μεταβλητές:

x_1 : on-site hrs/month

x_2 : remote hrs/month

► Αντικείμε συνάρτηση W:

$$\min W = 10x_1 + 8x_2$$

► Περιορισμοί:

I. Ζήτηση κλήσεων: $10x_1 + 8x_2 \geq 14000$

II. Συνολικές ώρες: $x_1 + x_2 \leq 1600$

III. Ελάχιστες on-site: $x_1 \geq 488$

IV. Ελάχιστες remote: $x_2 \geq 320$

A. $(x_1, x_2) = (600, 1000) \Rightarrow W_A = 14000$

B. $(x_1, x_2) = (1280, 320) \Rightarrow W_B = 15360$

Λύση: $x_1 = 1280, x_2 = 320 \Rightarrow \max W = 15360 \text{ τηλ}$

Λύση: τομή II ∩ IV
 Κορεσμοί: II, IV
 μη κορ: I, III

3.5 (0.5) Αν η εταιρεία ήθελε να συνδυάσει τους δύο στόχους (ελαχιστοποίηση κόστους, μεγιστοποίηση τηλεφωνημάτων εξυπηρέτησης) με βάση 0,75 για το κόστος και 0,25 για τα τηλεφωνήματα, διατυπώστε το νέο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού που θα έλυνε το συγκεκριμένο πρόβλημα.

► Μεταβλητές:

x_1 : on-site hrs/month

x_2 : remote hrs/month

► Αντικείμε συνάρτηση Q:

$$\min Q = 0.75 \cdot Z - 0.25W$$

$$\min Q = 0.75 \underbrace{(4x_1 + 3x_2)}_{\text{κόστος}} - 0.25 \underbrace{(10x_1 + 8x_2)}_{\text{τηλέφων}}$$

► Περιορισμοί:

I. Ζήτηση κλήσεων: $10x_1 + 8x_2 \geq 14000$

II. Συνολικές ώρες: $x_1 + x_2 \leq 1600$

III. Ελάχιστες on-site: $x_1 \geq 488$

IV. Ελάχιστες remote: $x_2 \geq 320$

Βέλτιστη λύση:

$x_1 = 1280, x_2 = 320 \Rightarrow \max W = 6080 \text{ τηλεφων}$

(μεγιστοποίηση των on-site)