

Θέμα 1 (3 μονάδες)

Η GreenEnergy A.E. είναι μια εταιρεία που δραστηριοποιείται στον τομέα της προμήθειας ηλεκτρικής ενέργειας και πρόσφατα αποφάσισε να επεκταθεί στον χώρο της εξοικονόμησης ενέργειας για κατοικίες. Η διοίκηση της εταιρείας σκέφτεται να προσφέρει στους υφιστάμενους πελάτες της ένα νέο, πρωτοποριακό σύστημα έξυπνης διαχείρισης ενέργειας για οικιακή χρήση, στο οποίο υπάρχει πιθανότητα 0,25 να προσελκύσει ένα σημαντικό μερίδιο αγοράς (εγγραφή 100 χιλ. χρηστών) και πιθανότητα 0,75 να προσελκύσει ένα μικρό μερίδιο αγοράς (εγγραφή 20 χιλ. χρηστών). Το κόστος ανάπτυξης του συστήματος υπολογίζεται στα 1 εκ. \$, ενώ το κόστος εγγραφής κάθε χρήστη είναι 80 \$.

Εναλλακτικά, διερευνά τη δυνατότητα συνεργασίας με υφιστάμενες εταιρείες ενεργειακών λύσεων, με καθαρό κέρδος από την ενσωμάτωση πρόσθετων λειτουργιών στα προϊόντα της εταιρείας 2 εκ. \$, ή εξετάζει το ενδεχόμενο άμεσης εξαγοράς μιας μικρομεσαίας επιχείρησης που έχει ήδη αναπτύξει μια παρόμοια τεχνολογία οπότε τα κέρδη που θα αποκομίσει θα ανέρχονται στα 3,6 εκ. \$. Ωστόσο, η διοίκηση εκτιμά ότι θα καταφέρει να πραγματοποιήσει την εξαγορά πριν από τους ανταγωνιστές της με πιθανότητα 70%.

Δεδομένης της ανταγωνιστικότητας και της ταχείας ανάπτυξης της αγοράς, όλες οι παραπάνω ενέργειες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, δηλαδή αν η εταιρεία πραγματοποιήσει ενέργειες προς μια κατεύθυνση, δεν θα είναι σε θέση να προλάβει να αλλάξει τη στρατηγική της.

Τέλος, η διοίκηση της εταιρείας εξετάζει την πρόσληψη μιας εταιρείας συμβούλων με αμοιβή 10.000 \$ για να εκτιμήσει την αποδοχή που θα έχει το νέο σύστημα έξυπνης διαχείρισης ενέργειας. Σε αντίστοιχες περιπτώσεις πρόβλεψης επιτυχίας, η εταιρεία συμβούλων είχε 90% πιθανότητα επιτυχίας στην πρόβλεψη επίτευξης σημαντικού μεριδίου αγοράς ενώ είχε 0,15 πιθανότητα αποτυχίας στην πρόβλεψη επίτευξης μικρού μεριδίου αγοράς. Ωστόσο, αν η GreenEnergy A.E. περιμένει πριν από την αναφορά της εταιρείας συμβούλων, η πιθανότητά της να επιτύχει σημαντικό μερίδιο αγοράς και να εξαγοράσει μια μικρομεσαία επιχείρηση με την τεχνολογία της παρόμοιας εφαρμογής ανέρχεται στο 90% εξαιτίας της προαναφερόμενης ανταγωνιστικότητας.

1.1 (2.0) Να βρεθεί η βέλτιστη πολιτική επενδύσεων που πρέπει να ακολουθήσει η GreenEnergy A.E. σύμφωνα με το κριτήριο Bayes.

a1: μόνη της (κόστος = 1.000k, έσοδο = 80/αμερ)

$$\begin{aligned} S_{11}(25\%): 100k \text{ αμερ} &\Rightarrow \text{κέρδος} = 7.000k \\ S_{12}(75\%): 20k \text{ αμερ} &\Rightarrow \text{κέρδος} = 600k \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} \pi_{TK}(a_1) &= 2.200k \\ \pi_{TK}(\text{χωρίς}) &= 2.520k \end{aligned} \right\}$$

a2: συνεργασία $\Rightarrow$ κέρδος = 2.000k $\left\{ \pi_{TK}(a_2) = 2.000k \right.$

a3: προηγ. εξαγοράς επιχ

$$\begin{aligned} S_{31}(70\%): \text{επιτυχία} &\Rightarrow \text{κέρδος} = 3.600k \\ S_{32}(30\%): \text{αποτυχία} &\Rightarrow \text{κέρδος} = 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} \pi_{TK}(a_3) &= 2.520k \\ \pi_{TK}(a_4) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

a4: καμία ενέργεια $\Rightarrow$ κέρδος = 0 $\left\{ \pi_{TK}(a_4) = 0 \right.$

Συμβούλοι: κόστος = 10k	P(G S)	(0,2) (0,8)	
		S ₁₁	S ₁₂
E ₁ : 100k αμερ	E ₁	0,9	0,15
E ₂ : 20k αμερ	E ₂	0,1	0,85

$$\begin{aligned} P(E_1) &= 0,9 \cdot 0,2 + 0,15 \cdot 0,8 = 30\% \\ P(E_2) &= 0,1 \cdot 0,2 + 0,85 \cdot 0,8 = 70\% \end{aligned}$$

P(S _i E _j)	S ₁₁ S ₁₂	
	S ₁₁	S ₁₂
E ₁	60%	40%
E ₂	2,86%	97,14%

E₁: (30%)

$$\pi_{TK}(a_1|E_1) = 0,6 \cdot 7.000k + 0,4 \cdot 600k = 4.440k$$

$$\pi_{TK}(a_2|E_1) = 2.000k$$

$$\pi_{TK}(a_3|E_1) = 0,1 \cdot 3.600k + 0,9 \cdot 0 = 360k$$

$$\pi_{TK}(a_4|E_1) = 0$$

$$\Rightarrow \pi_{TK}(E_1) = 4.440k$$

E₂: (70%)

$$\pi_{TK}(a_1|E_2) = 0,0286 \cdot 7.000k + 0,9714 \cdot 600k = 788k$$

$$\pi_{TK}(a_2|E_2) = 2.000k$$

$$\pi_{TK}(a_3|E_2) = 0,1 \cdot 3.600k + 0,9 \cdot 0 = 360k$$

$$\pi_{TK}(a_4|E_2) = 0$$

$$\Rightarrow \pi_{TK}(E_2) = 2.000k$$

$$\begin{aligned} \pi_{TK}(E) &= \pi_{TK}(\mu_E) = \\ &= 0,3 \cdot 4.440k + 0,7 \cdot 2.000k = \\ &= 2.732k \end{aligned}$$

1.2 (1.0) Να προσδιοριστεί η αξία της δειγματοληπτικής πληροφορίας καθώς και η αξία της πλήρους πληροφορίας.

$$\text{Δειγματολ: } \pi_{ADP} = \pi_{TK}(\mu_E) - \pi_{TK}(\text{χωρίς}) = 2.732k - 2.520k = 212k > 10k \sim \text{συμφέρει}$$

$$\text{Πλήρους: } \pi_{TKN} = P(S_{11}) \cdot K_1^* + P(S_{12}) \cdot K_2^* = 0,25 \cdot 7.000k + 0,75 \cdot 2.520k = 3.640k$$

$$\pi_{AIP} = \pi_{TKN} - \pi_{TK}(\text{χωρίς}) = 3.640k - 2.520k = 1.120k > \pi_{ADP}$$

Θέμα 2 (2 μονάδες)

Εργοστάσιο παραγωγής μολυβιών θέλει να σχεδιάσει τη βέλτιστη στρατηγική ώστε να ελαχιστοποιηθεί το κόστος παραγωγής για τους επόμενους τρεις μήνες. Το εργοστάσιο παράγει μολύβια σε χιλιάδες κιβώτια, ενώ λόγω περιορισμών στη γραμμή παραγωγής μπορεί να παράξει κιβώτια σε πολλαπλάσια των 10 χιλιάδων, με μέγιστη δυναμικότητα παραγωγής ανά μήνα τις 30 χιλιάδες κιβώτια. Λόγω συμφωνιών με τα εμπορικά καταστήματα που συνεργάζεται, ο υπεύθυνος πωλήσεων γνωρίζει εκ των προτέρων ότι η ζήτηση για τους επόμενους 3 μήνες θα είναι 10, 25 και 35 χιλιάδες κιβώτια αντίστοιχα. Το κόστος παραγωγής κάθε κιβωτίου ανέρχεται στα 10 €, ενώ το κόστος αποθήκευσης στα 6 €. Το κόστος αποθήκευσης ενός κιβωτίου επιβαρύνει τον μήνα στο τέλος του οποίου το κιβώτιο είναι στην αποθήκη, ενώ το απόθεμα στην αρχή και στο τέλος του τριμήνου είναι μηδέν.

2.1 (1.5) Ως υπεύθυνος παραγωγής καλείστε να βελτιστοποιήσετε τη στρατηγική παραγωγής για την τριμηνιαία περίοδο με τη χρήση δυναμικού προγραμματισμού, λαμβάνοντας υπόψη τον περιορισμό παραγωγής, τη ζήτηση και τα κόστη παραγωγής και αποθήκευσης.

► Σταδιακά:

$n=1$: 3^{ος} μήνας

$n=2$: 2^{ος} μήνας

$n=3$: 1^{ος} μήνας

► Ζήτηση: $d_n = \{10, 25, 35\}$

► μεταβ. κατάστασης: S_n τετρ. στην αποθήκη

► μεταβ. απόφασης: x_n τετρ. προς παραγωγή

$x_n = \{0, 10, 20, 30\}$

$S_{n-1} = S_n + x_n - d_n$, $S_1(\cdot) = S_3(\cdot) = 0$

► Κόστος:

$C_{\text{par}}(x_n) = 10x_n$, $x_n = 0, 10, 20, 30$

$C_{\text{αποθ}}(S_n) = 6S_n$, $S_n = 0, 5, 10, \dots, 35$

► Ελαχιστοποίηση κόστους:

$F_n(S_n, x_n) = C_{\text{αποθ}}(S_n) + C_{\text{par}}(x_n) + F_{n-1}^*(S_n, x_n)$

$F_n^*(S_n, x_n) = \min \{F_n(S_n + x_n - d_{n+1})\}$

Βήμα $n=1$ ($d_3=35$) πρέπει $S_1 + x_1 = 35$

S_1/x_1	0	10	20	30
5	x	x	x	$30+300+0$
15	x	x	$40+200+0$	x
25	x	$150+100+0$	x	x
35	$210+0+0$	x	x	x

S_1/x_1	0	10	20	30	$F^*(s_1)$	x_1^*
5	x	x	x	330	330	30
15	x	x	290	x	290	20
25	x	250	x	x	250	10
35	210	x	x	x	210	0

$$0+30-25=5$$

Βήμα $n=2$ ($d_2=25$) $S_2 + x_2 = 30$ ή 40 ή 50 ή 60

S_2/x_2	0	10	20	30
0	x	x	x	$0+300+330$
10	x	x	$60+200+330$	$60+300+290$
20	x	$120+100+330$	$120+200+290$	$120+300+250$

S_2/x_2	0	10	20	30	$F_2^*(s_2)$	x_2^*
0	x	x	x	630	630	30
10	x	x	590	650	590	20
20	x	550	610	570	550	10

$$0+10-10=0$$

Βήμα $n=3$ ($d_1=10$), $x_3 + S_3 = 10, 20, 30$

S_3/x_3	0	10	20	30	$F_3^*(s_3)$	x_3^*
0	x	$0+100+630$	$0+200+590$	$0+300+550$	730	10
-	-	730	790	850		

Βέλτιστη στρατηγική: $10 \rightarrow 30 \rightarrow 30$

2.2 (0.5) Να ερμηνεύσετε ποιοτικά και να εξηγήσετε την στρατηγική του ερωτήματος 2.1. Χωρίς να επιλύσετε ξανά το πρόβλημα, αν το κόστος παραγωγής είχε προστεθεί και ένας σταθερός όρος, ο οποίος θα ήταν ανεξάρτητος του επιπέδου παραγωγής, αλλά θα επιβαλλόταν μόνο αν το εργοστάσιο επέλεγε να παράγει, θα άλλαζε η στρατηγική, και γιατί;

• Χωρίς σταθερό κόστος (2.1): Δεν συμφέρει να παράγω παραπάνω και να αποθηκεύω, γιατί η αποθήκευση κοστίζει. Άρα παράγω just-in-time, δηλ. κάθε μήνα όσο χρειάζεται για να καλυφθεί η ζήτηση. Εξάιρεση είναι ο 2ος μήνας, όπου αναγκαστικά παράγω λίγο παραπάνω για να υπάρχει απόθεμα, επειδή αλλιώς δεν θα μπορούσε να καλυφθεί η ζήτηση του 3ου (λόγω ορίου παραγωγής 30 χιλ.).

• Με σταθερό κόστος παραγωγής: θεωρητικά μπορεί να συμφέρει μαζική παραγωγή (batch) νωρίτερα και αποθήκευση, ώστε να «μοιραστεί» το σταθερό κόστος και να γλιτώσω μελλοντικές εκκινήσεις. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, όμως, επειδή υπάρχει σφιχτό όριο παραγωγικής ικανότητας και υψηλή/αυξανόμενη ζήτηση, η βέλτιστη πολιτική πιθανότατα παραμένει ίδια με του 2.1 (παραγωγή για κάλυψη ζήτησης και το ελάχιστο απαραίτητο απόθεμα στον 2ο μήνα).

Θέμα 3 (5 μονάδες)

Μικρό αρτοποιείο, πέραν των βασικών δραστηριοτήτων του, παρασκευάζει δύο είδη γλυκισμάτων: κεικάκια και μπισκότα. Το αρτοποιείο επιθυμεί να μεγιστοποιήσει τα κέρδη από την πώληση των δύο προϊόντων, δεδομένου ότι από κάθε κιλό κεικάκια έχει καθαρό κέρδος 3,1€, και από κάθε κιλό μπισκότα 4,6 €.

Για τα δύο είδη χρησιμοποιούνται διαφορετικές ποσότητες πρώτων υλών, ενώ απαιτούνται συγκεκριμένοι χρόνοι ψησίματος στον φούρνο του αρτοποιείου, με τους πόρους αυτούς να είναι περιορισμένοι. Συγκεκριμένα, για την παρασκευή 1 κιλού κεικάκια απαιτούνται δύο μονάδες αλευριού και μία μονάδα ζάχαρης, ενώ για την παρασκευή 1 κιλού από μπισκότα απαιτούνται μία μονάδα αλευριού και δύο μονάδες ζάχαρης. Συνολικά το αρτοποιείο κάθε βδομάδα προμηθεύεται 100 μονάδες αλευριού και 80 μονάδες ζάχαρης που καταναλώνονται αποκλειστικά στην παρασκευή γλυκισμάτων.

Για τους χρόνους ψησίματος, και προκειμένου να υπάρχει συντονισμός στην παρασκευή των γλυκισμάτων και των άλλων δραστηριοτήτων, το αρτοποιείο σε μια βδομάδα μπορεί να χρησιμοποιήσει τον φούρνο για 40 ώρες τις καθημερινές και 20 ώρες το σαββατοκύριακο, με τον περιορισμό ότι τα μπισκότα πρέπει να ψηθούν υποχρεωτικά μέσα στο σαββατοκύριακο γιατί χρειάζονται πολύ χώρο στο φούρνο. Ταυτόχρονα τα κεικάκια χρειάζονται 1 ώρα ψησίματος ανά κιλό, ενώ τα μπισκότα 1,5 ώρα ανά κιλό. Τέλος, το αρτοποιείο συνεργάζεται με τοπική καφετέρια που έχει πραγματοποιήσει μόνιμη παραγγελία για την αγορά κατ' ελάχιστο 20 κιλών κεικάκια κάθε βδομάδα.

3.1 (1.5) Ως ιδιοκτήτης του μικρού αρτοποιείου, καλείστε να διαμορφώσετε και να επιλύσετε το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού που μεγιστοποιεί τα εβδομαδιαία κέρδη από την πώληση γλυκισμάτων.

► Μεταβλητές:

x_1 : kg /wk κεικάκια

x_2 : kg /wk μπισκότα

► Αντικείμε συνάρτηση z :

$$\max z = 3.1x_1 + 4.6x_2$$

► Περιορισμοί:

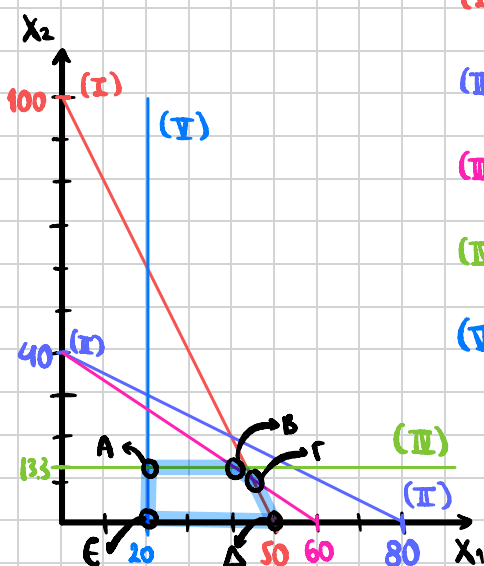
I. Μονάδες αλεύρι : $2x_1 + x_2 \leq 100$

II. Μονάδες ζάχαρη : $x_1 + 2x_2 \leq 80$

III. Ώρες χρήσης φούρνου : $x_1 + 1.5x_2 \leq 60$

IV. Ώρες φούρνου ΣΚ : $1.5x_2 \leq 20$

V. Ζήτηση σε κεικάκια : $x_1 \geq 20$



$$(I): \frac{x_1}{50} + \frac{x_2}{100} \leq 1$$

$$(II): \frac{x_1}{80} + \frac{x_2}{40} \leq 1$$

$$(III): \frac{x_1}{60} + \frac{x_2}{40} \leq 1$$

$$(IV): \frac{x_2}{13.3} \leq 1$$

$$(V): \frac{x_1}{20} \geq 1$$

B: $(x_1, x_2) = (40, 13.3) \Rightarrow z_0 = 185.18$

Γ: $(x_1, x_2) = (45, 10) \Rightarrow z_1 = 185.5$

D: $(x_1, x_2) = (50, 0) \Rightarrow z_0 = 155$

Μέγιστο Κέρδος:

$$\begin{matrix} x_1 = 45 \\ x_2 = 10 \end{matrix} \left\{ \max z = 185.5 \right.$$

$$\text{Λύση: } I \wedge III \Rightarrow \begin{cases} \text{Κορεσμένοι περιορισμοί: I, III} \\ \text{Μη κορεσμένοι περιορισμοί: II, IV, V} \end{cases}$$

3.2 (1.5) Να διατυπωθεί το δυαδικό πρόβλημα, να προσδιοριστεί η βέλτιστη λύση του και να δοθεί η οικονομική ερμηνεία των μεταβλητών του.

Δυαδικό Πρόβλημα:

► Μεταβλητές:

y_1 : οριακή αξία μονάδας αλεύρι $\leftrightarrow 2x_1 + x_2 \leq 100$

y_2 : οριακή αξία μονάδας ζάχαρη $\leftrightarrow x_1 + 2x_2 \leq 80$

y_3 : οριακή αξία ώρας φούρνου $\leftrightarrow x_1 + 1.5x_2 \leq 60$

y_4 : οριακή αξία ώρας φούρνου ΣΚ $\leftrightarrow 1.5x_2 \leq 20$

y_5 : οριακή αξία ελάχιστης παραγγελίας $\leftrightarrow -x_1 \leq -20$

κορεσμοί $\Rightarrow y_i \neq 0$

μη κορ $\Rightarrow y_i = 0$

κορεσμοί $\Rightarrow y_i \neq 0$

μη κορ $\Rightarrow y_i = 0$

μη κορ $\Rightarrow y_i = 0$

► Περιορισμοί:

$$\begin{aligned} 2y_1 + y_2 + y_3 + 0 - y_5 &\leq 3.1 \sim \text{οριακό κέρδος 1€ τιμής μπισκότου} \\ y_1 + 2y_2 + 1.5y_3 + 1.5y_4 + 0 &\leq 4.6 \sim \text{οριακό κέρδος 1€ τιμής κεικάκι} \end{aligned} \left\{ \begin{matrix} y_2 = y_4 = 0 \\ y_5 = 0 \end{matrix} \right. \left\{ \begin{matrix} 2y_1 + y_3 \leq 3.1 \\ y_1 + 1.5y_3 \leq 4.6 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} y_1 = 0.025 \\ y_3 = 3.05 \end{matrix} \right.$$

► Ελαχιστοποίηση: $\min U = 100y_1 + 80y_2 + 60y_3 + 20y_4 - 20y_5 \Rightarrow \min U = 185.5$

$y_1 = 0.025 \Rightarrow$ αν αυξηθεί ο πόρος αλεύρι κατά 1 μονάδα, το μέγ κέρδος ΑΥΞΑΝΕΤΑΙ κατά 0.025€ { binding constraints
 $y_3 = 3.05 \Rightarrow$ αν αυξηθούν οι ώρες φούρνου κατά 1 ώρα, το μέγ κέρδος ΑΥΞΑΝΕΤΑΙ κατά 3.05€ }
 $y_2 = y_4 = y_5 \Rightarrow$ μικρές μεταβολές δεν επηρεάζουν το μέγ κέρδος { non-binding

3.3 (1.0) Αν το αρτοποιείο έχει την ευελιξία να τροποποιήσει την τιμή πώλησης του ενός κιλού μπισκότων εντός του εύρους 4-5€/kg, για ποια τιμή το πρωτεύον πρόβλημα παρουσιάζει άπειρες λύσεις, αν όλα τα υπόλοιπα δεδομένα παραμείνουν σταθερά;

$$Z = 31x_1 + 46x_2 \Rightarrow \lambda_2 = -0.674 \quad \textcircled{1} \lambda_2 = \lambda_I \Rightarrow \frac{-31}{c_2'} = -\frac{2}{3} \Rightarrow c_2' = 4.65 \in (4,5) \sim \text{ok}$$

$$I 2x_1 + x_2 = 100 \Rightarrow \lambda_I = -2$$

$$II x_1 + 1.5x_2 = 60 \Rightarrow \lambda_{II} = -2/3 \quad \textcircled{2} \lambda_2 = \lambda_{II} \Rightarrow \frac{-31}{c_2'} = -2 \Rightarrow c_2' = 1.55 \notin (4,5) \sim \text{απορ}$$

3.4 (1.0) Το αρτοποιείο έχει τις εξής διαθέσιμες επιλογές για την παρούσα εβδομάδα.

- Να αποκτήσει 1 επιπλέον ώρα φούρνου τις καθημερινές με κόστος 4 €.
- Να αποκτήσει 4 επιπλέον ώρες φούρνου το Σαββατοκύριακο με συνολικό κόστος 0,1 €.
- Να προμηθευτεί 10 επιπλέον μονάδες ζάχαρης με κόστος 0,1 €.
- Να προμηθευτεί 10 επιπλέον μονάδες αλευριού με κόστος 0,2 €.

Ποια ή ποιες από τις παραπάνω επιλογές συμφέρουν το αρτοποιείο να υλοποιήσει ώστε να αυξήσει τα κέρδη του;

Επιλογή	Περιορ	Shadow price	Έσοδα	Κόστος	Κέρδος	Συμφέρει;
i. +1 hr φούρνο καθημ	III κορ	$y_3 = 3.05$	$1 \cdot 3.05 = 3.05$	4	-0.95	ΟΧΙ
ii. +4hrs φούρνος ΣΚ	III, IV	$y_3 = 3.05, y_4 = 0$	$4(3.05 + 0) = 12.2$	0.1	12.1	ΝΑΙ !!!
iii. +10 μον ζάχαρη	II ακορ	$y_2 = 0$	$10 \cdot 0 = 0$	0.1	-0.1	ΟΧΙ
iv. +10 μον αλεύρι	I κορ	$y_1 = 0.025$	$10 \cdot 0.025 = 0.25$	0.2	0.05	ΝΑΙ