

## Θέμα 1 (2.5 μονάδες)

Η AquaPure, μια εταιρεία που δραστηριοποιείται στον τομέα της διαχείρισης υδάτινων πόρων, σχεδιάζει να επενδύσει 500.000 € για την κατασκευή μιας μονάδας αφαλάτωσης με σταθερή ετήσια παραγωγή 2.000.000 κυβικών μέτρων ( $m^3$ ) πόσιμου νερού. Η AquaPure έχει υπογράψει 5ετή σύμβαση με τη δημοτική αρχή μιας παραθαλάσσιας περιοχής, η οποία θα αγοράζει όλο το νερό σε τιμή ίση με 0,2 €/m<sup>3</sup> για όλη τη διάρκεια ζωής του έργου. Το σταθερό ετήσιο κόστος λειτουργίας ανέρχεται σε 250.000 €.

Λόγω έλλειψης κεφαλαίων, η εταιρεία εξετάζει δύο εναλλακτικές λύσεις για τη χρηματοδότηση του έργου, οι οποίες απαιτούν πολύμηνη αναμονή και διαπραγματεύσεις και ως εκ τούτου δεν μπορούν να υλοποιηθούν ταυτόχρονα ή σειριακά.

Η πρώτη επιλογή αφορά την υποβολή αίτησης για κρατική επιχορήγηση, η οποία μπορεί να καλύψει 50% του συνολικού κόστους της επένδυσης. Για τη διαχείριση της διαδικασίας υποβολής της αίτησης, η AquaPure πρέπει να συνεργαστεί με ένα εξειδικευμένο γραφείο επιδοτήσεων, του οποίου η αμοιβή ανέρχεται σε 50.000 €, ανεξαρτήτως της τελικής έγκρισης. Η πιθανότητα επιτυχούς έγκρισης της επιχορήγησης εκτιμάται σε 70%. Ταυτόχρονα, για το υπόλοιπο ποσό της επένδυσης, η εταιρεία θα πρέπει να λάβει δάνειο από εγχώρια τράπεζα, με συνολικό κόστος τόκων 40.000 € κατά τη διάρκεια της 5ετίας πρόσθετα στο αρχικό κεφάλαιο το οποίο θα πρέπει να έχει εξοφληθεί στην ίδια χρονική περίοδο.

Η άλλη εναλλακτική επιλογή αφορά την πρόταση συνεργασίας με έναν όμιλο ξενοδοχείων, στον οποίο η AquaPure προτίθεται να προσφέρει προμήθεια ίση με το 50% επί των κερδών της ώστε ο όμιλος να χρηματοδοτήσει εξ ολοκλήρου το έργο. Σε αυτή την περίπτωση, υπάρχει 10% πιθανότητα ο όμιλος να απορρίψει την πρόταση της AquaPure και να συνεργαστεί με κάποια ανταγωνίστρια της.

Τέλος, η διοίκηση εξετάζει την πιθανότητα πρόσληψης μιας εταιρείας συμβούλων, με αμοιβή 20.000 €, η οποία θα αξιολογήσει ταχύτατα την πιθανότητα επιτυχίας της αίτησης για κρατική επιχορήγηση. Σύμφωνα με ιστορικά στοιχεία, η εταιρεία συμβούλων είχε 10% πιθανότητα αποτυχίας στην πρόβλεψη έγκρισης και 80% πιθανότητα επιτυχίας στην πρόβλεψη απόρριψής της.

1.1 (2.0) Να σχεδιαστεί το δέντρο αποφάσεων του προβλήματος και να προσδιορισθεί η βέλτιστη πολιτική που πρέπει να ακολουθηθεί απ' την GreenEnergy με το κριτήριο του Bayes.

Κόστος = 500k

Ετήσια έσοδα = 400k { κέρδος λειτουργ = 750k

Ετήσια έξοδα = 250k } Σύν

a1: αίτηση κρατ. ενισχυ (κόστος αιτ = 50k, κόστος δανείου = 40k)

$S_1$  (70%): έγκριση (50% χρημ.)  $\Rightarrow$  κέρδος = 750 - 250 - 50 - 40 = 410k {  $\pi TK(a_1) = 335k$

$S_2$  (30%): απόρριψη (0 χρημ.)  $\Rightarrow$  κέρδος = 750 - 500 - 50 - 40 = 160k }

a2: συνεργασία με όμιλο

$S_{21}$  (90%): επιτυχία (500k χρημ, κόστος = 50% κερδ)  $\Rightarrow$  κέρδος = 375k {  $\pi TK(a_2) = 337.5k$

$S_{22}$  (10%): αποτυχία (τίποτα)  $\Rightarrow$  κέρδος = 0

a3: καμία ενέργεια  $\Rightarrow$  κέρδος = 0 {  $\pi TK(a_3) = 0$

$\Rightarrow \pi TK(\text{χωρίς}) = \max(335, 337.5, 0) = 337.5k$

| Συμβουλή: κόστος = 20k   | $P(G S_j)$ | $\omega(1)$ | $\omega(3)$ |
|--------------------------|------------|-------------|-------------|
| $E_1$ : έγκριση αίτησης  | $E_1$      | $S_{11}$    | $S_{12}$    |
| $E_2$ : απόρριψη αίτησης | $E_2$      | 0.1         | 0.8         |

$$P(E_1) = 0.7 \cdot 0.9 + 0.3 \cdot 0.2 = 69\%$$

$$P(E_2) = 0.7 \cdot 0.1 + 0.3 \cdot 0.8 = 31\%$$

| $P(S_j G)$ | $S_1$ | $S_2$ |
|------------|-------|-------|
| $E_1$      | 91.3% | 8.7%  |
| $E_2$      | 22.6% | 77.4% |

$E_1$ : (69%)

$$\pi TK(a_1|E_1) = 0.913 \cdot 410 + 0.087 \cdot 160 = 388.25$$

$$\pi TK(a_2|E_1) = \pi TK(a_2) = 337.5k$$

$$\pi TK(a_3|E_1) = 0$$

$$\Rightarrow \pi TK(E_1) = 388.25k$$

$E_2$ : (31%)

$$\pi TK(a_1|E_2) = 0.226 \cdot 410 + 0.774 \cdot 160 = 216.5$$

$$\pi TK(a_2|E_2) = \pi TK(a_2) = 337.5$$

$$\pi TK(a_3|E_2) = 0$$

$$\Rightarrow \pi TK(E_2) = 337.5k$$

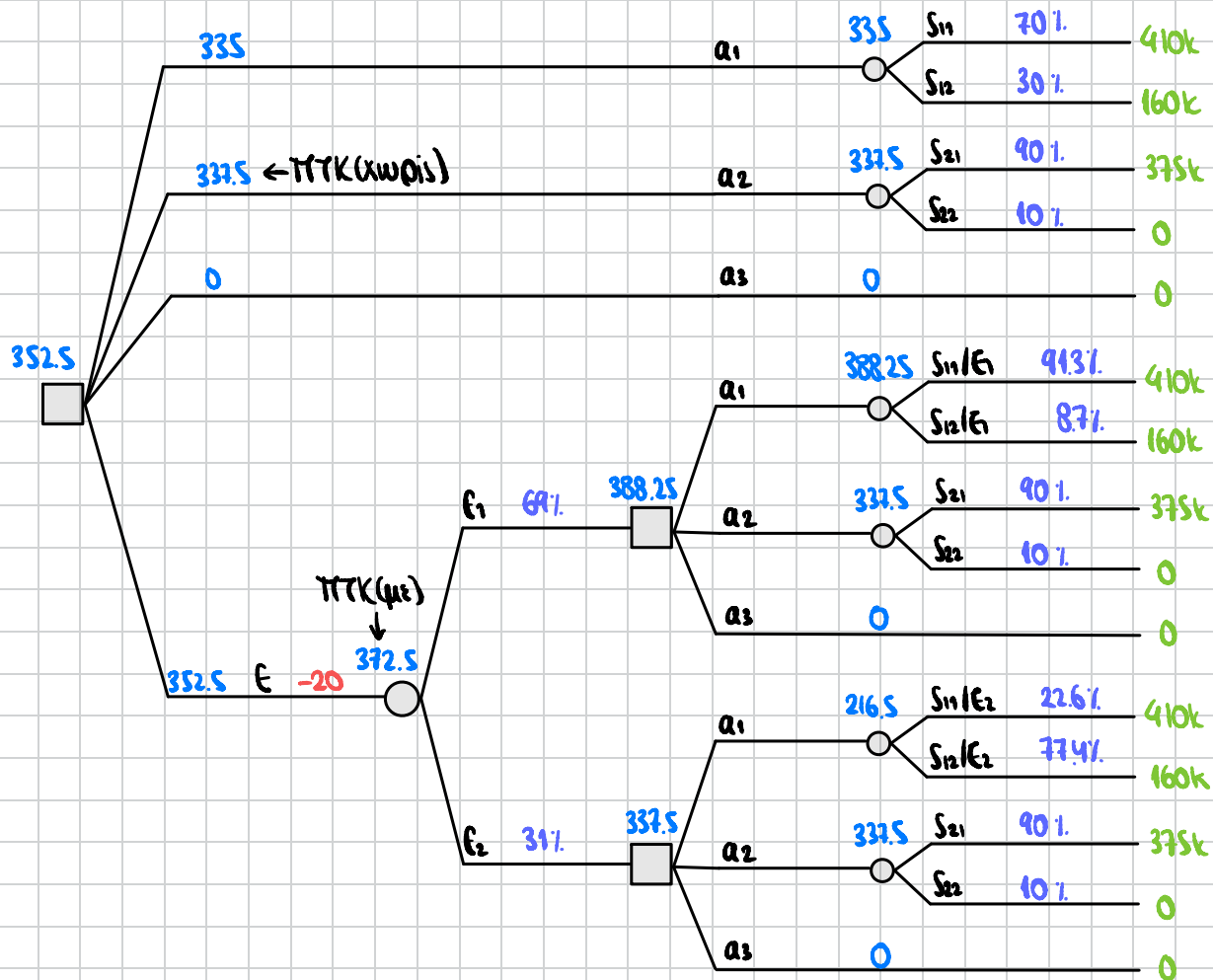
$$\begin{aligned} \pi TK(E) &= \pi TK(\mu E) = \\ &= 0.69 \cdot 388.25 + 0.31 \cdot 337.5 = \\ &= 372.5k \end{aligned}$$

1.2 (0.5) Να προσδιορισθεί η αξία της δειγματοληπτικής πληροφορίας καθώς και η αξία της πλήρους πληροφορίας.

Δειγματολ:  $\pi A \Delta \pi = \pi TK(\mu E) - \pi TK(\text{χωρίς}) = 372.5k - 337.5k = 35k > 20k \sim \text{συμφέρει}$

Πλήρους:  $\pi TK \Pi \Pi = P(S_{11}) \cdot K_{11}^* + P(S_{12}) \cdot K_{12}^* = 0.7 \cdot 410k + 0.3 \cdot 337.5k = 388.25k$

$$\pi A \Pi \Pi = \pi TK \Pi \Pi - \pi TK(\text{χωρίς}) = 388.25k - 337.5k = 50.75k > \pi A \Delta \pi$$



Βέλτιστη Ισοτιμική:

σύμβολοι:  $\rightarrow$  επιλογή  $\rightarrow$  υποβολή αίτησης  
 $\searrow$  απόρριψη  $\rightarrow$  συνέργει με όμιλο

## Θέμα 2 (1.5 μονάδες)

Το Green Future είναι μικρό εργοστάσιο, το οποίο λόγω της ενεργειακής κρίσης έχει θέσει στόχο να μειώσει την εξάρτησή του από ορυκτά καύσιμα και να επενδύσει σε τεχνολογίες καθαρής ενέργειας. Το εργοστάσιο έχει στη διάθεσή του 2.000 ευρώ, τα οποία πρέπει να κατανομηθούν σε τρεις διαφορετικές πράσινες τεχνολογίες: Ηλεκτρικά Φορτωτικά Μηχανήματα (τύπου κλαρκ), Ηλιακά Πάνελ, Αντλία Θερμότητας.

Κάθε μία από αυτές τις τεχνολογίες μπορεί να συμβάλει σημαντικά στην εξοικονόμηση ενέργειας από τη μείωση της χρήσης ορυκτών καυσίμων, αλλά η απόδοσή τους σε εξοικονομούμενες μεγαβατώρες (MWh) εξαρτάται από το ποσό που θα επενδυθεί. Λόγω της αρχιτεκτονικής της κάθε τεχνολογίας, η διοίκηση του εργοστασίου θέλει να εκμεταλλευτεί στο έπακρο τον διαθέσιμο προϋπολογισμό, ώστε να μεγιστοποιήσει τη συνολική εξοικονομούμενη ενέργεια.

Η επένδυση στις τρεις τεχνολογίες μπορεί να γίνει σε προκαθορισμένα επίπεδα κόστους και αναμενόμενης εξοικονόμησης ενέργειας, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

| Εξοικονόμηση Ενέργειας  | Επένδυση (€) |       |       |       |
|-------------------------|--------------|-------|-------|-------|
|                         | 500          | 1,000 | 1,500 | 2,000 |
| Τεχνολογία              |              |       |       |       |
| Κλαρκ (MWh)             | 2,1          | 6     | 8,5   | 13    |
| Ηλιακά Πάνελ (MWh)      | 2,5          | 6     | 12    | 14    |
| Αντλία Θερμότητας (MWh) | 3            | 4     | 7,5   | 11    |

Στάδια:

$n=1$  : αντλία θερμ

$n=2$  : ηλιακά πάνελ

$n=3$  : κλαρκ

2.1 (1.5) Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του δυναμικού προγραμματισμού, προσδιορίστε τη βέλτιστη πολιτική κατανομής του διαθέσιμου κεφαλαίου, έτσι ώστε να μεγιστοποιηθεί η εξοικονομούμενη ενέργεια (MWh), την οποία και να υπολογίσετε.

• Μεταβλ κατάστασης  $S_n \in \{0, 500, \dots, 2000\}$  : ποσό διαθέσιμο στην αρχή του  $n$  } μεταβλ κατάστασης:  
 • Μεταβλ απόφασης  $X_n \in \{0, 500, \dots, 2000\}$  : ποσό που επενδύεται στο  $n$  }  $S_{n-1} = S_n - X_n$

• Απόδοσεις ανά τεχν : Κλαρκ :  $P_1(x) = \{0, 2,1, 6, 8,5, 13\}$

Ηλ Πάνελ :  $P_2(x) = \{0, 2,5, 6, 12, 14\}$

Αντλία Θερμ :  $P_3(x) = \{0, 3, 4, 7,5, 11\}$

• Αναδρομική σχέση:  $F_n(S_n, X_n) = P_n(X_n) + F_{n-1}^*(S_{n-1})$

$F_n^*(S_n) = \max_{0 \leq x \leq S_n} F_n(S_n, X_n)$ ,  $F_0^*(\cdot) = 0$

Βήμα  $n=1 \leadsto F_1(S_1, X_1) = P_1(X_1) + F_0^*(S_1 - X_1) = P_1(X_1)$

|              |   |     |      |      |      |
|--------------|---|-----|------|------|------|
| $S_1$        | 0 | 500 | 1000 | 1500 | 2000 |
| $F_1^*(S_1)$ | 0 | 3   | 4    | 7,5  | 11   |
| $X_1^*$      | 0 | 500 | 1000 | 1500 | 2000 |

$2000 - 1500 = 500$

Βήμα  $n=2 \leadsto F_2(X_2, S_2) = P_2(X_2) + F_1^*(S_2 - X_2) \rightarrow \forall S_2 = 0, 500, \dots, 2000, X_2 = 0, \dots, S_2$

| $S_2 \backslash X_2$ | 0     | 500     | 1000 | 1500 | 2000 | $S_2 \backslash X_2$ | 0   | 500 | 1000 | 1500 | 2000 | $F_2^*(S_2)$ | $X_2^*$ |
|----------------------|-------|---------|------|------|------|----------------------|-----|-----|------|------|------|--------------|---------|
| 0                    | 0+0   |         |      |      |      | 0                    | 0   |     |      |      |      | 0            | 0       |
| 500                  | 0+3   | 2,5+0   |      |      |      | 500                  | 3   | 2,5 |      |      |      | 3            | 0       |
| 1000                 | 0+4   | 2,5+3   | 6+0  |      |      | 1000                 | 4   | 5,5 | 6    |      |      | 6            | 1000    |
| 1500                 | 0+7,5 | 2,5+4   | 6+3  | 12+0 |      | 1500                 | 7,5 | 6,5 | 9    | 12   |      | 12           | 1500    |
| 2000                 | 0+11  | 2,5+7,5 | 6+4  | 12+3 | 14+0 | 2000                 | 11  | 10  | 10   | 15   | 14   | 15           | 1500    |

Βήμα  $n=3 \leadsto F_3(X_3, S_3) = P_3(X_3) + F_2^*(S_3 - X_3) \rightarrow \forall S_3 = 0, \dots, 2000, X_3 = 0, \dots, S_3$

| $S_3 \backslash X_3$ | 0    | 500    | 1000 | 1500  | 2000 | $F_3^*(S_3)$ | $X_3^*$ |
|----------------------|------|--------|------|-------|------|--------------|---------|
| 2000                 | 0+15 | 2,1+12 | 6+6  | 8,5+3 | 13+0 |              |         |
|                      | 15   | 14,1   | 12   | 11,5  | 13   | 15           | 0       |

$2000 - 0 = 2000$

Βέλτιστη Στρατηγική:

$n=3$ : Κλαρκ  $\rightarrow 0\text{€}, 0\text{ MWh}$

$n=2$ : Ηλ. Πάνελ  $\rightarrow 1500\text{€}, 12\text{ MWh}$

$n=1$ : Αντ. Θερμ  $\rightarrow \frac{500\text{€}}{2000\text{€}}, 3\text{ MWh}$   
 $\rightarrow 15\text{ MWh}$

### Θέμα 3 (4.5 μονάδες)

Μια εταιρεία παραγωγής καλλυντικών προϊόντων παράγει δύο τύπους κρεμών, την ενυδατική κρέμα (K1) και την αντιγηραντική κρέμα (K2). Για την παραγωγή των δύο κρεμών, η εταιρεία προμηθεύεται δύο είδη πρώτων υλών: τη βάση κρέμας (BK) και το έλαιο αμυγδάλου (EA). Το κόστος προμήθειας των πρώτων υλών είναι:

- Βάση κρέμας (BK): 0,032 €/ml
- Έλαιο αμυγδάλου (EA): 0,055 €/ml

Η εταιρεία έχει υπογράψει σύμβαση με προμηθευτή πρώτων υλών ώστε να αγοράζει τουλάχιστον 80 λίτρα BK και 20 λίτρα EA ημερησίως. Οι παραπάνω πρώτες ύλες αξιοποιούνται μαζί με νερό και πρόσθετα υλικά, τα οποία έχουν αμελητέο κόστος, για να παραχθούν κρέμες, με τις δύο κρέμες να συσκευάζονται των 100 ml. Οι ποσότητες πρώτων υλών που απαιτούνται για την παραγωγή του κάθε τεμαχίου κρέμας για τους δύο τύπους φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

| Συστατικό            | K1    | K2    |
|----------------------|-------|-------|
| Βάση Κρέμας (BK)     | 60 ml | 40 ml |
| Έλαιο Αμυγδάλου (EA) | 30 ml | 50 ml |
| Νερό & Πρόσθετα      | 10 ml | 10 ml |

Οι τιμές πώλησης των προϊόντων είναι:

- K1: 14 €/τεμάχιο
- K2: 17 €/τεμάχιο

Η αποθήκη της εταιρείας έχει τη δυνατότητα να αποθηκεύει και να διανέμει 2.200 τεμάχια κρέμας ημερησίως.

Επίσης λόγω ανάγκης χρήσης συγκεκριμένων μηχανημάτων για την παρασκευή εκάστοτε κρέμας, η μέγιστη δυνατή παραγωγή είναι 1.500 τεμάχια για την K1 και 1.400 τεμάχια για την K2.

Το κόστος επεξεργασίας για την παραγωγή της K1 είναι 0,5 €/τεμάχιο, ενώ της K2 είναι 0,7 €/τεμάχιο.

Ο στόχος της εταιρείας είναι η μεγιστοποίηση των ημερησίων κερδών από την παραγωγή και πώληση των προϊόντων.

3.1 (1.5) Ως διευθυντής παραγωγής, καλείτε να διατυπώσετε και να επιλύσετε το μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού που μεγιστοποιεί τα ημερήσια κέρδη της εταιρείας.

► Μεταβλητές:

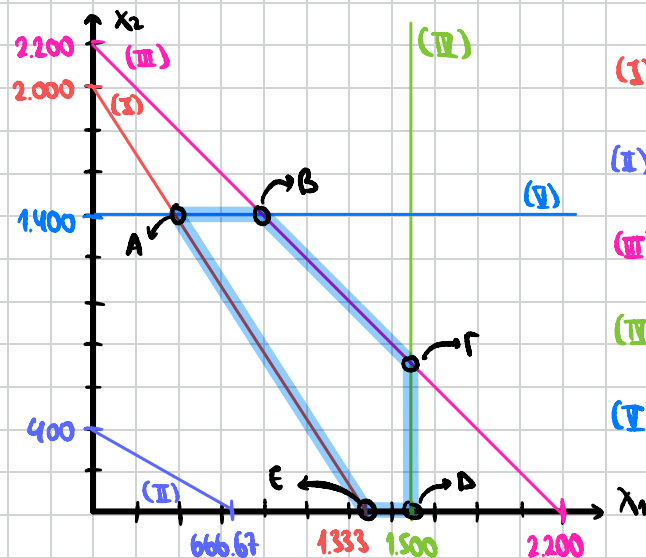
|                    |    |    |      |     |       |
|--------------------|----|----|------|-----|-------|
| $x_1$ : τμχ/day K1 | K1 | 14 | 3.57 | 0.5 | 9.93  |
| $x_2$ : τμχ/day K2 | K2 | 17 | 4.03 | 0.7 | 12.27 |

► Περιορισμοί:

- Ελάχ ml BK :  $60x_1 + 40x_2 \geq 80.000$
- Ελάχ ml EA :  $30x_1 + 50x_2 \geq 20.000$
- Όριο αποθ :  $x_1 + x_2 \leq 2.200$
- Όριο παραχ K1 :  $x_1 \leq 1.500$
- Όριο παραχ K2 :  $x_2 \leq 1.400$

► Αντικειμενική Συναρτηση:

$$\max Z = 9.93x_1 + 12.27x_2$$



$$(I) \frac{x_1}{1.333} + \frac{x_2}{2.000} \geq 1$$

$$(II) \frac{x_1}{666.67} + \frac{x_2}{400} \geq 1$$

$$(III) \frac{x_1}{2.200} + \frac{x_2}{2.200} \leq 1$$

$$(IV) \frac{x_1}{1.500} \leq 1$$

$$(V) \frac{x_2}{1.400} \leq 1$$

$$B: (x_1, x_2) = (800, 1400) \rightarrow Z_B = 25.122$$

$$G: (x_1, x_2) = (1.500, 700) \rightarrow Z_G = 23.484$$

$$\text{Μέγιστο Κέρδος}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 800 \\ x_2 = 1.400 \end{array} \right\} \max Z = 25.122$$

Λύση: III & V  $\rightarrow$  Κορεσμένοι περιορισμοί: III, V  
Μη κορεσμένοι περιορισμοί: I, II, IV

3.2 (1.5) Να διατυπωθεί το δυαδικό πρόβλημα, να προσδιοριστεί η βέλτιστη λύση του και να δώσετε τη σχετική οικονομική ερμηνεία των μεταβλητών του.

Δυαδικό Πρόβλημα:

► Μεταβλητές:

$$\begin{array}{ll} y_1: \text{οριακή αξία αύξησης ελάχ ml BK} & \leftarrow -60x_1 - 40x_2 \leq -80.000 \quad \text{μη κορ} \Rightarrow y_1 = 0 \\ y_2: \text{οριακή αξία αύξησης ελάχ ml EA} & \leftarrow -30x_1 - 50x_2 \leq -20.000 \quad \text{μη κορ} \Rightarrow y_2 = 0 \\ y_3: \text{οριακή αξία ορίου αποθηκευσης} & \leftarrow x_1 + x_2 \leq 2.200 \quad \text{κορεσμ} \Rightarrow y_3 \neq 0 \\ y_4: \text{οριακή αξία ορίου παραγωγής K1} & \leftarrow x_1 \leq 1.500 \quad \text{μη κορ} \Rightarrow y_4 = 0 \\ y_5: \text{οριακή αξία ορίου παραγωγής K2} & \leftarrow x_2 \leq 1.400 \quad \text{κορεσμ} \Rightarrow y_5 \neq 0 \end{array}$$

► Περιορισμοί:

$$\begin{array}{l} -60y_1 - 30y_2 + y_3 + y_4 + 0 \geq 9.93 \sim \text{οριακό κέρδος 1 τμχ K1} \\ -40y_1 - 50y_2 + y_3 + 0 + y_5 \geq 12.27 \sim \text{οριακό κέρδος 1 τμχ K2} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} y_1 = 0 \\ y_2 = y_4 = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} y_3 \geq 9.93 \\ y_3 + y_5 \geq 12.27 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_3 = 9.93 \\ y_5 = 2.34 \end{array} \right.$$

► Ελαχιστοποίηση:  $\min U = -80.000 y_1 - 20.000 y_2 + 2.200 y_3 + 1.500 y_4 + 1.400 y_5 \Rightarrow \min U = 25.122$   
 $y_3 = 9.93$ : Αν αυξηθεί το όριο αποθήκευσης κατά 1 τμχ, το μέγ κέρδος ΑΥΞΑΝΕΤΑΙ κατά 9.93€ } binding  
 $y_5 = 2.34$ : Αν αυξηθεί το όριο παραγωγής K2 κατά 1 τμχ, το μέγ κέρδος ΑΥΞΑΝΕΤΑΙ κατά 2.34€ } constraints  
 $y_1 = y_2 = y_4 = 0$ . Μικρές μεταβολές στην ελάχ ποσότητα ΒΚ, ΕΑ και στο όριο παραγ K1, δεν επηρεάζ μεγ κέρδος

3.3 (0.5) Αν η εταιρεία έχει την ευελιξία να τροποποιήσει την τιμή πώλησης της Ενωδατικής Κρέμας (K2), για ποια τιμή πώλησης το πρωτεύον πρόβλημα παρουσιάζει άπειρες λύσεις, αν όλα τα υπόλοιπα δεδομένα παραμείνουν σταθερά;

$$\left. \begin{array}{l} \text{Z} = 9.93 x_1 + 12.27 x_2 \Rightarrow \lambda_Z = -0.809 \\ \text{III. } x_1 + x_2 = 2.200 \Rightarrow \lambda_{\text{III}} = -1 \\ \text{IV. } x_2 = 1.400 \Rightarrow \lambda_{\text{IV}} = 0 \end{array} \right\} \text{Για άπειρες λύσεις: } \lambda_Z = \lambda_{\text{III}} \Rightarrow \frac{-9.93}{C_1} = -1 \Rightarrow C_1' = 9.93 \text{€}$$

$$C_1' = \text{τιμή}' - 4.03 - 0.7 \Rightarrow \text{τιμή}' = 14.66 \text{€}$$

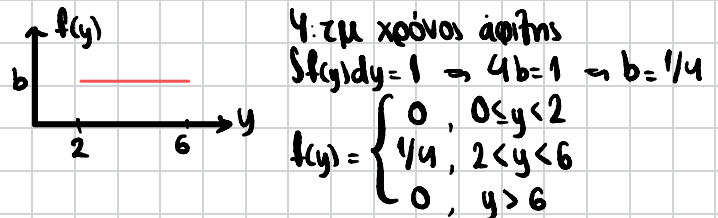
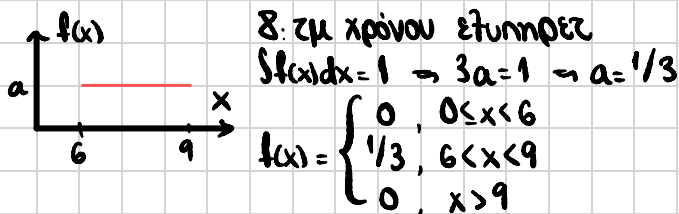
3.4 (1.0) Η εταιρεία έχει τις εξής διαθέσιμες επιλογές:

- (i) Να εγκαταστήσει πρόσθετα ράφια στην αποθήκη της ώστε να αυξήσει τη χωρητικότητα της αποθήκης κατά 100 τεμάχια ημερησίως με κόστος 600€
- (ii) Να αναβαθμίσει τα μηχανήματα παραγωγής της K1 ώστε να αυξηθεί η μέγιστη ημερήσια δυναμικότητα παραγωγής της K1 κατά 100 τεμάχια, με κόστος 50€
- (iii) Να αναβαθμίσει τα μηχανήματα παραγωγής της K2 ώστε να αυξηθεί η μέγιστη ημερήσια δυναμικότητα παραγωγής της K2 κατά 50 τεμάχια, με κόστος 150€

| Επιλογή          | Περιορ    | Shadow price | Έσοδα | Κόστος | Κέρδος | Συμφέρει; |
|------------------|-----------|--------------|-------|--------|--------|-----------|
| i. +100 τμχ αποθ | III κορ   | $y_3 = 9.93$ | 993   | 600    | 393    | ΝΑΙ       |
| ii. +100 τμχ K1  | IV μν κορ | $y_4 = 0$    | 0     | 50     | -50    | ΟΧΙ       |
| iii. +50 τμχ K2  | V κορ     | $y_5 = 2.34$ | 117   | 150    | -33    | ΟΧΙ       |

#### Θέμα 4 (1.5 μονάδες)

Υπηρεσία λειτουργεί με ένα ταμείο εξυπηρέτησης, το οποίο μπορεί να εξυπηρετήσει έναν πελάτη σε χρόνο από 6 έως 9 λεπτά, με την πιθανότητα να ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή εντός αυτού του διαστήματος. Αντίστοιχα ο χρόνος ανάμεσα σε δύο διαδοχικές αφίξεις πελατών ακολουθεί επίσης ομοιόμορφη κατανομή ανάμεσα στους 2 έως 6 λεπτά. Σας δίνονται οι τυχαίοι καθαροί αριθμοί 0,41, 0,32, 0,68, 0,45, 0,87, 0,89 για τον χρόνο εξυπηρέτησης πελατών, και οι τυχαίοι αριθμοί 2, 5, 5, 6, 4 λεπτά για τον χρόνο ανάμεσα σε διαδοχικές αφίξεις πελατών.



4.1 (1.0) Να παραχθούν τα αναγκαία τυχαία δείγματα για την προσομοίωση του παραπάνω ταμείου, να κατασκευαστεί ο πίνακας αναμονής, και να υπολογιστεί ο μέσος όρος χρόνου αναμονής των πελατών. Να διατηρηθούν 2 δεκαδικά ψηφία στους υπολογισμούς.

$$0 \leq x < 6: F(x) = 0$$

$$6 \leq x < 9: F(x) = 1/3 \cdot \int_6^x dt = (x-6)/3$$

$$x \geq 9: F(x) = 1$$

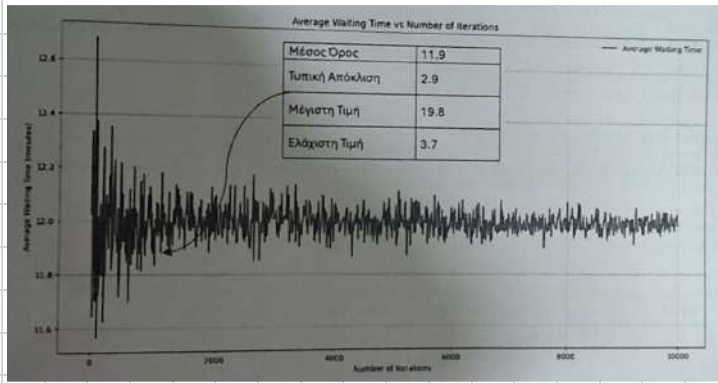
$$R = F(x) = (x-6)/3 \Rightarrow x = 3R + 6 \quad 0 \leq R \leq 1$$

$$\left. \begin{array}{l} R = 0.41 \Rightarrow x(R=0.41) = 7.23 \\ R = 0.32 \Rightarrow x(R=0.32) = 6.96 \\ R = 0.68 \Rightarrow x(R=0.68) = 8.04 \\ R = 0.45 \Rightarrow x(R=0.45) = 7.35 \\ R = 0.87 \Rightarrow x(R=0.87) = 8.61 \\ R = 0.89 \Rightarrow x(R=0.89) = 8.67 \end{array} \right\} \text{χρόνοι εξυπ}$$

| Α/Α πελάτη | Χρόνος αφίξης | Χρόνος εξυπ | Χρόνος έναρξης | Χρόνος λήξης | Χρόνος αναμονής |
|------------|---------------|-------------|----------------|--------------|-----------------|
| 1          | 0             | 7.23        | 0              | 7.23         | 0               |
| 2          | 2             | 6.96        | 7.23           | 14.19        | 5.23            |
| 3          | 7             | 8.04        | 14.19          | 22.23        | 7.19            |
| 4          | 12            | 7.35        | 22.23          | 29.58        | 10.23           |
| 5          | 18            | 8.61        | 29.58          | 38.19        | 11.58           |
| 6          | 22            | 8.67        | 38.19          | 46.86        | 16.19           |

ΜΧΑΟ = 8.40 λεπτά

**4.2 (0.2)** Αν η υπηρεσία έχει θέσει ως στόχο ο μέσος χρόνος αναμονής να είναι 6 λεπτά, μπορεί να είναι ικανοποιημένη με το αποτέλεσμα που υπολογίσατε στο 1ο ερώτημα;  
 Η υπηρεσία είχε πραγματοποιήσει σε παρόμοια περίπτωση στο παρελθόν σε διαφορετικά αλλά συγκρίσιμα δεδομένα ανάλυση τύπου Monte Carlo, παράγοντας το σχήμα που σας δίνεται παρακάτω.



Όχι. Στο 4.1 βρήκαμε Μ.Ο. αναμονής = 8,40', που είναι ήδη > 6', άρα ο στόχος δεν ικανοποιείται.

Επιπλέον, το ιστορικό γράφημα Monte Carlo που έχετε δείχνει σύγκλιση γύρω από ~11,9' (Τ.Α. ≈ 2,9, ελάχιστο ≈ 3,7, μέγιστο ≈ 19,8), κάτι που ενισχύει ότι, με παρόμοιες παράμετρους, ο πραγματικός μέσος αναμονής είναι σημαντικά πάνω από 6'.

Συμπέρασμα: με το τωρινό σύστημα (1 ταμείο, εξυπ. U[6,9], αφίξεις U[2,6]) ο στόχος των 6' δεν είναι ρεαλιστικός.

Αν θέλουν να πλησιάσουν τα 6', πρακτικές επιλογές είναι:

- μείωση μέσου χρόνου εξυπηρέτησης (π.χ. αυτοματοποίηση/εκπαίδευση),
- δεύτερος εξυπηρετητής,
- εξομάλυνση/ρύθμιση αφίξεων (ραντεβού, time slots).

**4.3 (0.3)** Να αποδώσετε ποιοτικά την ερμηνεία του σχήματος με αναφορά στη μεταβλητή του μέσου όρου αναμονής που χρησιμοποιήθηκε στο 1ο ερώτημα, και να αποφανθείτε για τον αριθμό των επαναλήψεων που κρίνετε ότι απαιτούνται για επαρκή προσομοίωση (αιτιολογώντας την απάντησή σας).

ποιοτική ερμηνεία του σχήματος

- Ο άξονας x είναι ο αριθμός επαναλήψεων (iterations) και ο άξονας y ο τρέχων μέσος χρόνος αναμονής.
- Στην αρχή υπάρχουν μεγάλες ταλαντώσεις (υψηλή τυχαιότητα, μικρό δείγμα).
- Όσο αυξάνονται οι επαναλήψεις, ο τρέχων μέσος συγκλίνει (Νόμος Μεγάλων Αριθμών) σε τιμή γύρω στα 11,9'. Μετά από μερικές χιλιάδες iterations οι διακυμάνσεις είναι μικρές γύρω από αυτήν την τιμή.

6 λεπτά ⇒ ΜΧΑΟ = 8.40 λεπτά (μεγάλο σφάλμα)

Κριτήριο ακριβείας: 95% ΔΕ ( $z_{\alpha/2} = 1.96$  για 95%.)

Ακρίβεια ±0.5 λεπτά:  $n = \left( \frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{h} \right)^2 = \left( \frac{1.96 \cdot 2.9}{0.5} \right)^2 = 130$  επαναλήψεις

Ακρίβεια ±0.2 λεπτά:  $n = \left( \frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{h} \right)^2 = \left( \frac{1.96 \cdot 2.9}{0.2} \right)^2 = 800$  επαναλήψεις

- Το γράφημα δείχνει ορατή σταθεροποίηση μετά από μερικές χιλιάδες επαναλήψεις.
- Για μια πρακτική εκτίμηση του μέσου χρόνου αναμονής στο 4.1, θα πρότεινα τουλάχιστον 800 επαναλήψεις (ώστε ο 95% ΔΕ να έχει μισό πλάτος ≈ ±0,2').  
 Αν αρκεί ±0,5', τότε ~130 επαναλήψεις επαρκούν.
- Με μόνο 6 παρατηρήσεις (όπως κάναμε στο 4.1) η εκτίμηση δεν είναι αξιόπιστη.